MATHEMATIK
versteckt und doch allgegenwärtig

Hans G. Feichtinger
hans.feichtinger@univie.ac.at

Berufsinformationsmesse, 5. 3. 2009

BEST09

DREI HAUPT-THESEN

1. Mathematik ist **nicht so abstrakt** oder schwierig wie die meisten nach Absolvierung der Schulpflicht glauben;
2. Mathematik steckt **in vielen Dingen des täglichen Lebens**, wo die wenigsten es erwarten (Beispiele), und eine der wesentlichen Grundlagen moderner Technologie; und dieser Trend wird sich in Zukunft noch verstärken;
3. Mathematik kann **spannend** sein (wie jede andere Form von Forschung), auch wenn 2×2 immer 4 bleibt, gibt es viel zu tun (komplexe Systeme). Mathematik zeichnet sich durch **Universalität** aus (cm $<>$ inch, China $<>$ USA).

Mein persönlicher Werdegang

- Mittelschule am Bundesgymnasium in Wr. Neustadt;
- Lehramtsstudium Mathematik und Physik
- Doktoratsstudium (ursprünglich nicht geplant!)
- Habilitation und Lehrtätigkeit Universität Wien
- Gastprofessuren in Heidelberg, College Park and Storrs (USA), and Edinburgh
- Gründer der Arbeitsgruppe NuHAG (www.nuhag.eu): **Numerical Harmonic Analysis Group** at the University of Vienna, AUSTRIA

Übersicht: Vergleich mit BERGSTEIGERN

Es gibt viele Arten, Mathematik zu betreiben (und vieles von dem was ich sage, gilt auch für die meisten anderen Wissenschaften):

- Gifelstürmer == Spitzenforscher (die "Berühmten");
- Bergführer == (akad.) Lehrer
- Bergsteiger, Wanderer == ausgebildet MathematikerInnen die in den verschiedensten Bereichen tätig sind;
- Nicht-Bergsteiger == die Mehrheit, die Mathematik mit "Mühe haben" verbinden, mit dem Begriff der Unverständlichkeit, mit der Notwendigkeit zur buch-halterischen Genauigkeit.

MATHEMATIK und MUT

Was gute Mathematik (oder gute Schüler) von schlechten unterscheidet ist oftmals nicht die "geniale Veranlagung" sondern durch ein Quäntchen **Mut**, und die Bereitschaft, es sich selbst zu überlegen.
Menschen aus der Stadt sind vielleicht auch nicht zum Bergsteigen geboren, und die ersten Bergtouren mögen mit Angst (vor Absturz, Muskelkater, Anstrengung) verbunden sein, aber im Laufe der Zeit verbessern sich Kondition, Geschicklichkeit, Ortskenntnis, und das Bergwandern oder sogar Klettern wird als Erlebnis empfunden.
Manchmal ist es auch nur eine Frage des Mutes! (letzendlich sind die meisten math. Sachverhalte ganz einfach!)

Übersicht: Vergleich mit MUSIKERN

Es gibt viele Arten, Mathematik zu betreiben (und vieles von dem was ich sage, gilt auch für die meisten anderen Wissenschaften):

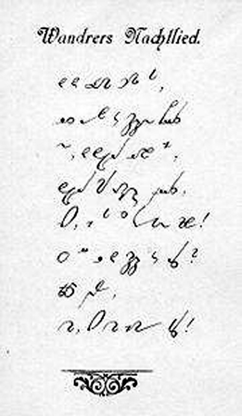
- Komponisten/Sänger == Spitzenforscher (die "Berühmten");
- Orchestestermusiker == Univ. Professoren
- Musikschullehrer == Math.-Lehrer
- Laienmusiker == Hobby-Mathematiker
- die breite Mehrheit der Bevölkerung, die keine Musik macht aber sich von Musik erbauen läßt == ??? wenige, die Mathematik für "schön bzw. wichtig halten!?

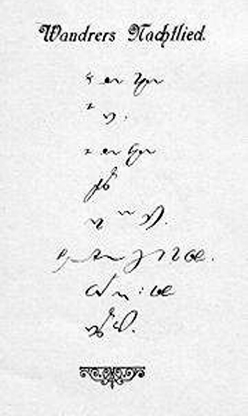
MATHEMATIK und ABSTRAKTION!

LEIDER wird Mathematik viel zu oft mit einer *schlechten Interpretation* des Begriffes **abstrakt** in Verbindung gebracht.
Die einfachste Erklärung wäre die folgende, anhand eines Beispiels:
Wenn wir in einen Korb, in dem sich 5 Semmeln befinden, noch 2 dazugeben, so sind es nachher 7 Semmeln, und wenn wir dann wieder drei wegnehmen, bleiben 4.
Es könnten aber genauso gut Äpfel in einer Schüssel sein, Marmeldegläser im Vorratskeller oder Kühe im Stall, Euros im Geldbörsl, was bleibt ist (abstrakt betrachtet)

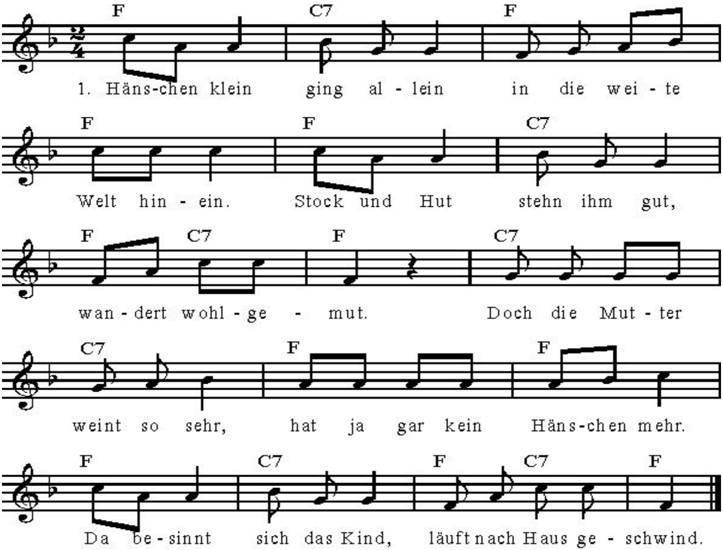
$$5 + 2 - 3 = 4$$

Wer weiss [noch], was Stenografie ist?





Was fängt ein Eskimo damit an?



MATHEMATIK und ABSTRAKTION

Aber woran liegt es? (wobei klar ist, dass es vermutlich eine große Vielfalt von Ursachen gibt.) Aber eine der wesentlichen Probleme liegt meines Erachtens in der **mathematischen Schreibweise**, der Verwendung von Symbolen, die nun oft "abstrakt" im Sinne von "da kann ich mir *ich mir nichts drunter vorstellen* verstanden werden. Ich möchte ein paar Beispiele geben, die im Prinzip beim Mathe-Lernen mit den eigenen Kindern entstanden sind.

MATHEMATIK und ABSTRAKTION

1) Dividieren: Es ist jedem schnell einleuchtend, dass $3 \cdot 7 = 21$ ist. Fragt man Volksschüler, **wievielmal** 3 den Wert 21 ergibt, so wird man meistens die richtige Antwort **7** bekommen. Wievielmal 573 ist 25785 (Antwort 45)? (ähnlich: aber wie zu rechnen?)

Fragt man hingegen nach der **Lösung der Gleichung**

$$3 \cdot x = 21$$

so erscheint das *schwierig*, und wenn es dann noch heißt, man muss 3 auf die andere Seite bringen, also die Gleichung umformen zu

$$x = 21/3$$

so geht das vielleicht noch, aber wenn es heißt , dass

$$3x + 8,15 = 27,80$$

ist, scheint das Auflösen nach x vielleicht noch schwieriger, obwohl es eine einfache Aufgabe aus dem Leben ist: 4 Leute gehen gemeinsam Essen, die Rechnung macht 27 EURO und 80 Cent aus, aber auf dem Heimweg erinnert sich nur mehr einer, wieviel sein Essen gekostet hat, die anderen hatten alle das gleiche Menü. Und schon sind wir beim Thema: Wo findet man Mathematik im Alltag, freilich in einer weniger versteckten Form, sodass wir uns nicht allzuviel hier darüber auslassen müssen.

2) Das Rechnen mit Potenzen.
Wir kenne alle die *Schreibweise* x^2 anstelle von $x \cdot x$, und entsprechend x^5 für $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$, einfach eine Frage der Konvention, eine "komprimierte Schreibweise".

Frage: Was ist also $(x^3)^4$??? Manche kommen auf die Idee, es

könnte $\mathbf{x^{3+4} = x^7}$ sein, andere vermuten (zurecht), es sollte $\mathbf{x^{12}}$ sein, aber wie kann man sich diese Regeln merken??

Gehen wir in den Supermarkt, und vergleichen wir ein Sonderangebot mit dem Standardpreis im Konkurrenzladen. Das Sonderangebot bietet 4 Deierpackungen um 24 EURO an, während im anderen Laden ein Stückpreis von EURO 1,90 verlangt wird, wenn man mindestens 5 Stück nimmt. Wofür soll man sich entscheiden?

Die Antwort ist einfach: 4 Dreierpackungen sind einfach 12 Stück, und das sind offenbar mehr als 5. Der Stückpreis ist also im Sonderangebot 24/12, somit ist das Konkurrenzangebot interessanter, noch dazu wo man nicht auf eine Stückzahl von 12 Einheiten eingeschränkt ist.

Gehen wir in den Supermarkt, und vergleichen wir ein Sonderangebot mit dem Standardpreis im Konkurrenzladen. Das Sonderangebot bietet 4 Deierpackungen um 24 EURO an, während im anderen Laden ein Stückpreis von EURO 1,90 verlangt wird, wenn man mindestens 5 Stück nimmt. Wofür soll man sich entscheiden?
Die Antwort ist einfach: 4 Dreierpackungen sind einfach 12 Stück, und das sind offenbar mehr als 5. Der Stückpreis ist also im Sonderangebot 24/12, somit ist das Konkurrenzangebot interessanter, noch dazu wo man nicht auf eine Stückzahl von 12 Einheiten eingeschränkt ist.

BEISPIEL: Potenzrechnung (wer fürchtet sich davor?)
Nun zur mathematischen Schreibweise. Die MathematikerInnen verwenden einfach eine eigene Bezeichnung für den Inhalt einer Dreierpackung, statt mit Worten zu operieren, und lange Texte zu machen, schreibt man

$$y = x^3 = x \cdot x \cdot x$$

für eine Deierpackung, somit ist das Angebot einfach eine *Viererpackung von Dreierpackungen*, oder

$$(\mathbf{x}^3)^4 = \mathbf{y}^4 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} =$$

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x}^{12} \quad !!$$

Also doch ganz einfach. Auf ähnliche Weise kann man auch Dinge wie den binomischen Lehrsatz, in der einfachsten Form die bekannt Formel

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{2ab} + \mathbf{b}^2$$

z.B. geometrisch interpretieren (man zeichne ein Quadrat mit Kantenlänge $a + b$ und zerlege es in zwei Quadrate mit Kantenlänge a bzw. b, der Rest sind zwei Rechtecke, mit Kantenlänge a bzw. b; WIKIPEDIA: binom. Lehrsatz).

Ich hoffe, dass noch nicht alle Zuhörer geistig abgeschaltet haben, sobald die "Unbekannten" (oder Variablen) x bzw. y bzw. a, b aufgetaucht sind!
Halten wir fest. Das **Verwenden von Symbolen** ist nur eine Begleiterscheinung, eine *Kurzschrift*, das wenig mit dem **mathematischen Gehalt** zu tun hat. Die Story von den 4 Dreierpackungen ist *mathematisch äquivalent* zur Potenzregel.
Die **Abstraktion** besteht darin, dass die Story mit den diversen Packungen universell anwendbar ist, für Marmeladegläser genauso wie für Apfelsaft- Packungen.

MATHEMATIK und ABSTRAKTION

Das Ziel des Mathematik-Unterrichts kann daher mit dem etwas im Musik-Unterricht verglichen werden. Es geht um die Vermittlung der Inhalte und math. bzw. logischen Denkweise, und weniger (das ist jedenfalls meine private Überzeugung) um die perfekte Beherrschung der math. Symbolsprache, auch wenn diese leichter zu trainieren und abzuprüfen ist. Die Denkweise ist für alle im **täglichen Leben** wichtig, sei es ein Arzt, ein Kaufmann, ein Kunde, ein Schuldner, eine Hausfrau oder ein Naturwissenschaftler, und (leider) es ist eben so, dass man leichter das Manipulieren von Symbolen lernt, weil es weniger Mühe zu machen scheint. Kurz: Notenschrift kann man als etwas *Geheimnisvolles* ansehen, oder einfach eine Methode, um musikalische Inhalte festzuhalten, ...

Unterhaltsames aus dem Alltag: LOGIK

Es wird oft gesagt, wie wichtig die **Schulung der Logik** ist, und dass das durch den Mathematik-Unterricht geschärft wird. Und ich hoffe dass das richtig ist. Allerdings zweifle ich manchmal, wenn ich Nachrichten höre, oder Diskussionen mitverfolge:

BEISPIEL 1: Diskutant (A) behauptet, alle Römer seien gescheit, und Diskutant (B) sagt: Nein, das stimmt nicht, alle Römer sind dumm. *Als ob das das Gegenteil wäre!*. Was ist die Verneinung der Aussage richtigerweise? Genügt es nicht, einen dummen Römer zu finden, um (A) zu widerlegen?

BEISPIEL 2: Heute wird es in zeitweise in ganz Oesterreich regnen. WIRKLICH? *Es ist schon bemerkenswert, dass es im Laufe des Tages irgendwann einmal IN GANZ OESTERREICH regnen wird!* Ist vielleicht eher folgendes gemeint: Für ganz Österreich gilt: es wird zeitweise regnen (nämlich einmal da, einmal dort).

Unterhaltsames aus dem Alltag: STATISTIK

Wenn man z.B. in den Zeitungen diverse statistische Aussagen liest, ist oft klar, dass die Autoren (und vermutlich sehr oft die Leser) gar nicht viel Ahnung von Prozentrechnung, Statistik oder ähnlich grundlegenden Rechenmethoden haben.

BEISPIELE

Bekannter Spruch: Trau keiner Statistik, die Du nicht selber gefälscht hast!

BIS HIERHER: Mathematik im Alltag, den vielleicht noch jede(r) selber finden hätte können.

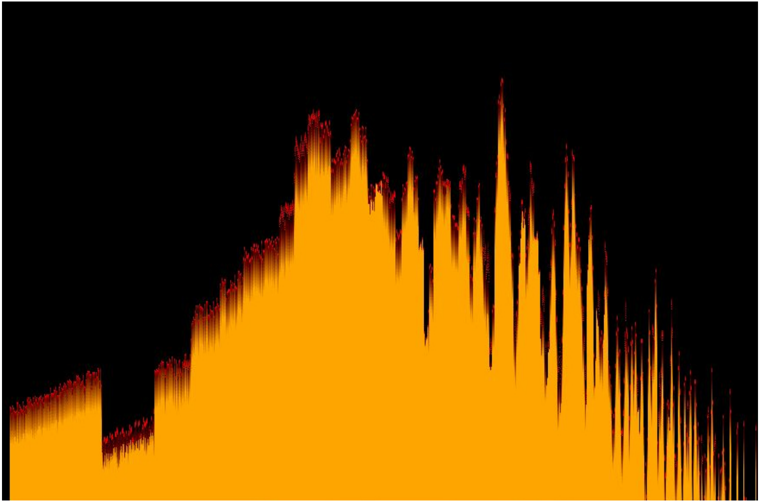
Mathematik im Alltag: Digitale Revolution

1. CD-Player, MP3-Player, DVD-Player, Digi-Cam;
2. WLAN, Mobil-Telefon, Digital Radio;
3. Tomographie, medizinische Bildverarbeitung;
4. Satelliten f. Wettervorhersage; Flugplanung;
5. Simulation von Car-Crashes; Datenbanken (Google);
6. Computational Physics (Materialwissenschaften);
7. Computational Chemistry (neue chem. Verbindungen);
8. Pharmazie (neue Heilmittel, Computersimulation);
9. **In fast allen Bereichen spielen math. Methoden, umgesetzt am Computer, zunehmend eine immer wichtigere Rolle!**

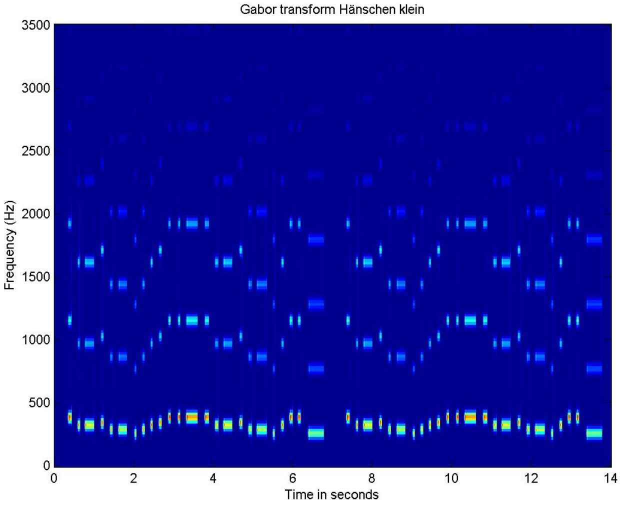
Beispiele aus dem Alltag 1

Zunächst einmal geht es mir darum aufzuzeigen, dass Mathematik schon jetzt im täglichen Leben in viele Dingen versteckt ist. Man muß nicht Mathematik studieren oder die Mathematik verstehen, um diese Dinge benutzen zu können, aber man sollte - als Teil der Allgemeinbildung - wenigstens wissen, wo/wie das der Fall ist..

Another (Standard) representation of a Musical STFT



Mathematische Basis des MP3-Players

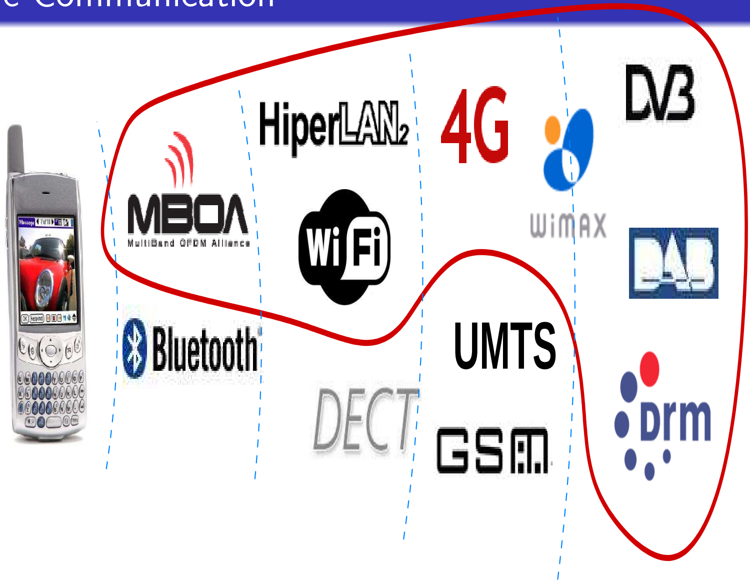


Mathematische Basis des MP3-Players II

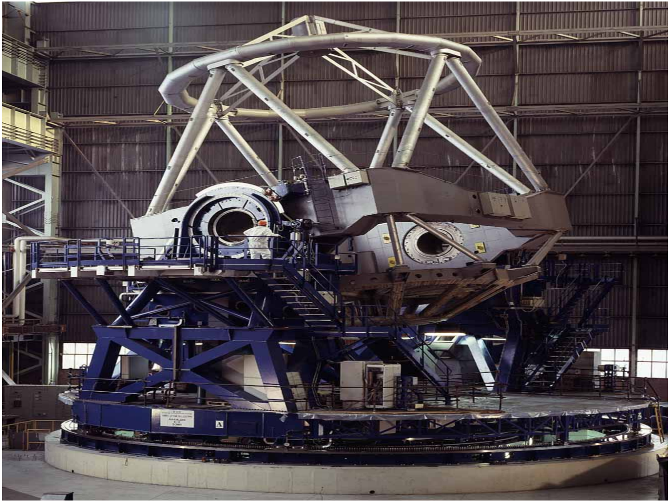
Was dahintersteckt ist ein "bestimmtes Koordinatensystem" für Musiksignale. Genauer gesagt bekommt man aus dem Schallsignal über das Mikrofon und dann einen sog. D/A Converter lange Folgen von Zahlen, die (erstaunlicherweise) die hörbare Musik (bis 20 kHz) exakt darstellen kann, indem (je nach Qualität der Aufzeichnung) typischerweise **44.100** ganzzahlige Werte aus dem Bereich pro Sekunde von 0 bis $255 = 2^8 - 1$ gespeichert werden. Im Prinzip is diese Information, in geeigneter Form, auf einer CD *codiert*, d.h. in verschlüsselter Form gespeichert.

Der große Vorteil dieser Codierungsverfahren ist die Verteilung der Information ueber einen bestimmten Zeitabschnitt auf die ganze CD. Wenn diese also einen kleinen Kratzer hat, fehlt vielleicht 1 Prozent der Information von dem Musikstück, verstreut über eine Minute, und man hat nicht einen Ausfall von 1/50 Sekunde (d.h. einen Knacks). Philips war auf diesem Markt führend will sie mit guten Mathematikern zusammengearbeitet haben.

Mobile Communication



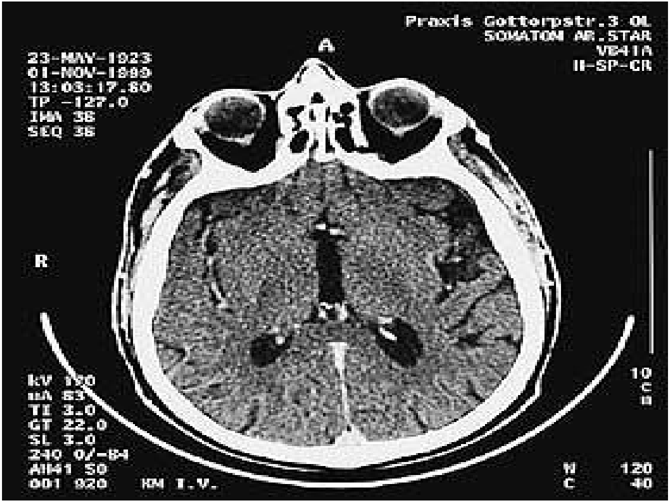
Astronomie: ESO VLS = very large telescope



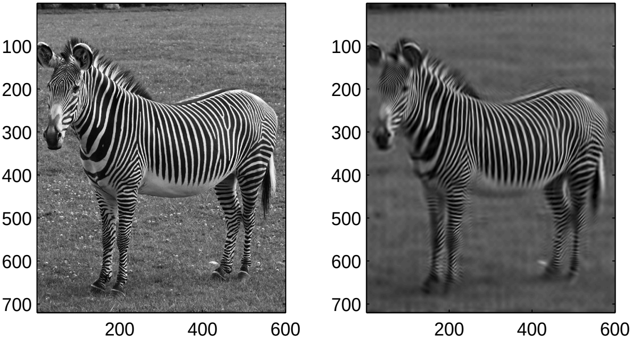
Astronomie: ESO VLS = very large telescope

Computer-Tomographen

Computer-Tomographen



Bildverarbeitungs-Anwendung



IMAGINARY

mit den Augen der Mathematik

Eine Ausstellung von mathematischen Formen von großer Ästhetik.

Ideen von Prof. Herwig Hauser (Univ. Wien)

02.03. bis 20.3. 2009, AULA der Universität Wien

Dr.-Karl-Lueger-Ring 1, 1010 Wien

Mo - Fr., 10-18.00, Do 10-20.00, Eintritt frei!!

LAST BUT NOT LEAST

Mathematik zu studieren ist grundsätzlich nicht einfacher oder schwieriger als viele andere Fächer.

Sicherlich ist ein gewisses Mindestmaß an **Begabung** und vor allem **Interesse und Engagement** Voraussetzung und wichtig. Im Gegensatz zu vielen anderen Fächern (z.B. in künsterlichen Fächern) ist ein guter Erfolg in der Mittelschule ein halbwegs brauchbarer Indikator für den zu erwartenden Studienerfolg (ausser die Erfolge waren durch reines "Pauken" erzielt).

Ein vor kurzem vorgestellte Studie in den USA sieht die MathematikerInnen als eine der zufriedensten Berufsgruppen.