

Local Fourier Analysis in our Daily Life

Undergraduate Colloquium

University of Edinburgh

January 17th, 2008

Hans G. Feichtinger

EUCETIFA - European Time-Frequency Center

NuHAG - University of Vienna

January 16, 2008

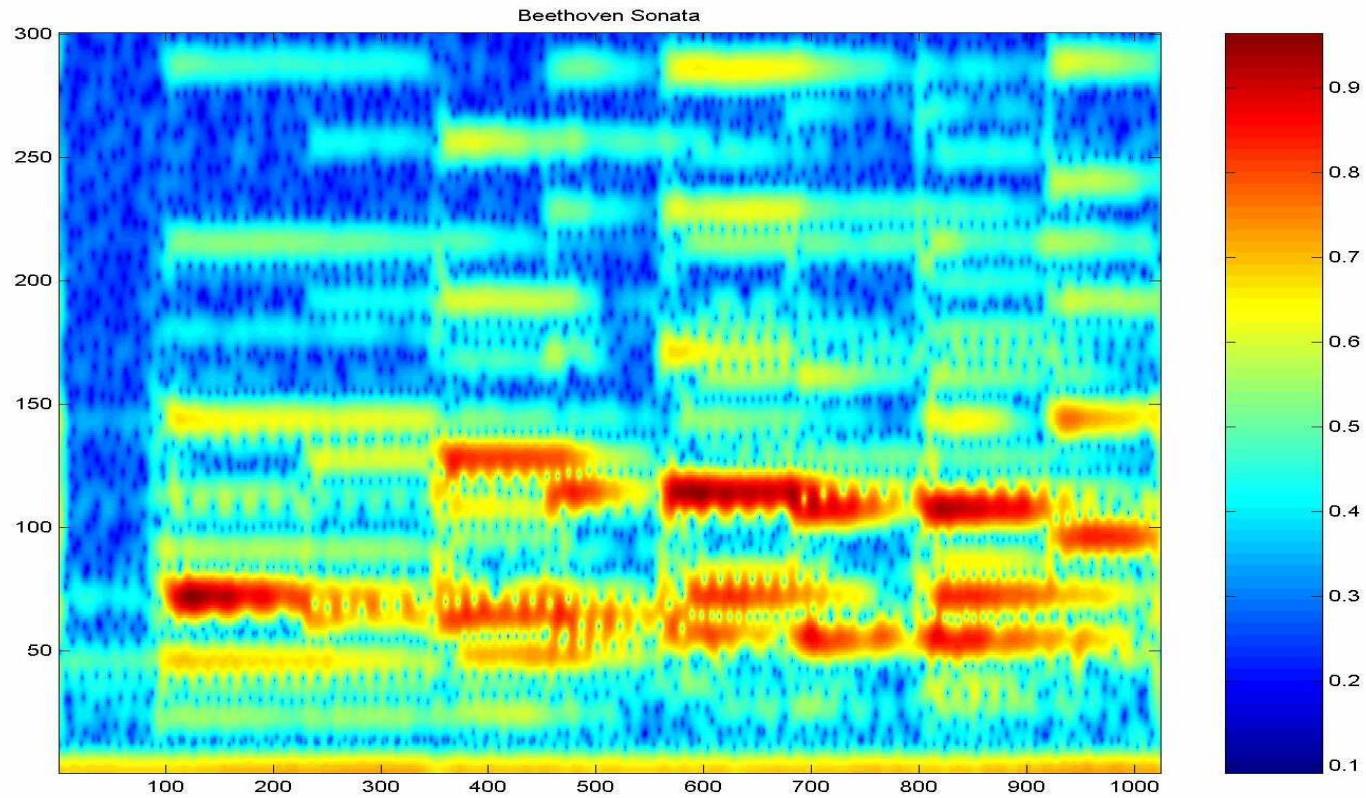
Hans G. Feichtinger

VORSCHAU

GENERATING SYSTEMS IN \mathbb{R}^d AND LINEAR INDEPENDENT FAMILIES

- Basic ideas of time-frequency analysis;
- Linear algebra taken geometrically (families of vectors)
- Bases for subspaces, generating systems, rank of a matrix
- Matrices of maximal rank, biorthogonal systems
- Least Squares Minimal Norm Methods (PINV)
- Gabor frames and Gabor Riesz Bases (Weyl-Heisenberg families)
- Algebraic foundations of Gabor Analysis
- Gabor Multiplier (multiplication of Gabor coefficients)
- Numerical aspects (efficient algorithms, structures)
- Functional analytic perspectives

A Typical Musical STFT (cf. Media-Player: fire)



Primer on Gabor analysis: Atomic Viewpoint

Let $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and Λ a lattice in time-frequency plane $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$.

$$\mathbf{f} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{a}(\lambda) \pi(\lambda) \mathbf{g}, \quad \text{for some } \mathbf{a} = (\mathbf{a}(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$$

is a so-called **Gabor expansion** of $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ for the **Gabor atom** g .

Primer on Gabor analysis: Atomic Viewpoint

Let $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and Λ a lattice in time-frequency plane $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$.

$$\mathbf{f} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{a}(\lambda) \pi(\lambda) \mathbf{g}, \quad \text{for some } \mathbf{a} = (\mathbf{a}(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$$

is a so-called **Gabor expansion** of $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ for the **Gabor atom** g .

1946 - D. Gabor: $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ and Gabor atom $g(t) = e^{-\pi t^2}$.

Primer on Gabor analysis: Atomic Viewpoint

Let $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and Λ a lattice in time-frequency plane $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$.

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) \pi(\lambda) g, \quad \text{for some } a = (a(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$$

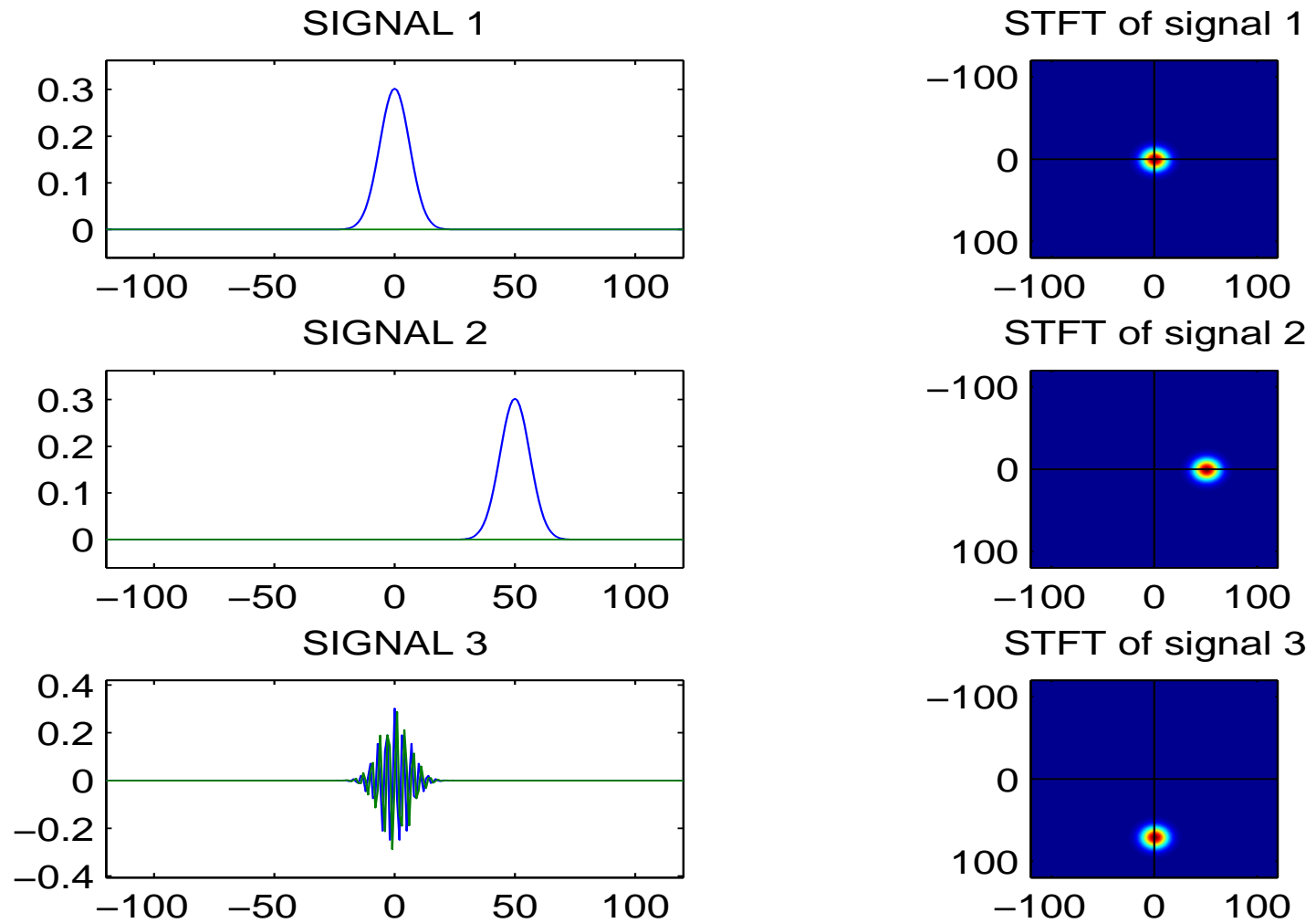
is a so-called **Gabor expansion** of $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ for the **Gabor atom** g .

1946 - D. Gabor: $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ and Gabor atom $g(t) = e^{-\pi t^2}$.

translation $T_x f(t) = f(t - x) \quad x \in \mathbb{R}^d$

modulation $M_\omega f(t) = e^{2\pi i t \cdot \omega} f(t) \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}}^d$

time-frequency shift $\pi(x, \omega) f(t) = M_\omega T_x f(t) \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$



Some algebra in the background: **The Heisenberg group**

Weyl commutation relation

$$T_x M_\omega = e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x, \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d.$$

Some algebra in the background: **The Heisenberg group**

Weyl commutation relation

$$T_x M_\omega = e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x, \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d.$$

$\{M_\omega T_x : (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d\}$ is a **projective representation** of $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Some algebra in the background: **The Heisenberg group**

Weyl commutation relation

$$T_x M_\omega = e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x, \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d.$$

$\{M_\omega T_x : (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d\}$ is a **projective representation** of $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Heisenberg group $\mathbb{H} := \{\tau M_\omega T_x : \tau \in \mathbb{T}, (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d\}$

Schrödinger representation $\{\tau M_\omega T_x : (x, \omega, \tau) \in \mathbb{H}\}$ is a square-integrable (irreducible) group representation of \mathbb{H} on the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Some algebra in the background: The Heisenberg group

Weyl commutation relation

$$T_x M_\omega = e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x, \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d.$$

$\{M_\omega T_x : (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d\}$ is a **projective representation** of $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Heisenberg group $\mathbb{H} := \{\tau M_\omega T_x : \tau \in \mathbb{T}, (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d\}$

Schrödinger representation $\{\tau M_\omega T_x : (x, \omega, \tau) \in \mathbb{H}\}$ is a square-integrable (irreducible) group representation of \mathbb{H} on the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Short-time Fourier transform (STFT)

Given a *window* g , then the *short-time Fourier transform* of f with respect to g is defined by

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt.$$

Moyal's formula or orthogonality relations for STFTs:

Let f_1, f_2, g_1, g_2 be in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Then

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \langle g_2, g_1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Reconstruction formula

Let $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ with $\langle g, \gamma \rangle \neq 0$. Then for $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ we have

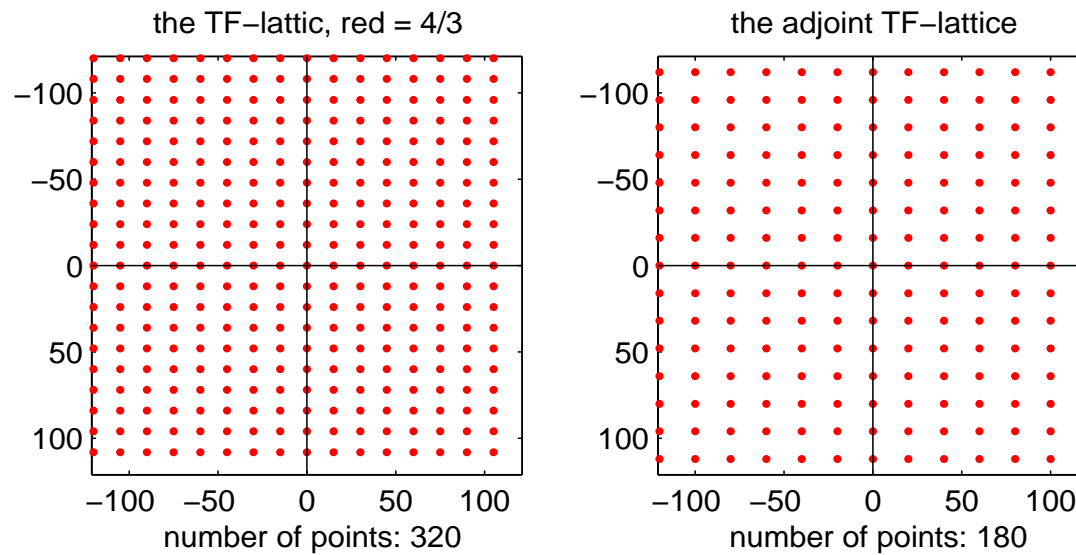
$$f = \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} V_g f(x, \omega) \pi(x, \omega) \gamma dx d\omega.$$

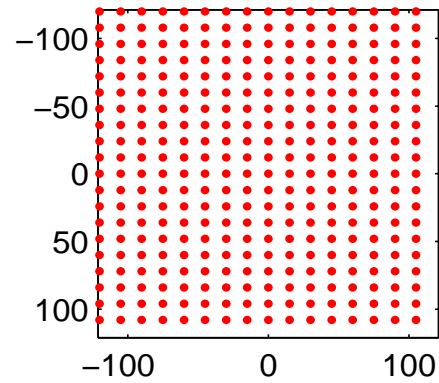
So typically one chooses $\gamma = g$ with $\|g\|_2 = 1$.

Given the fact that the STFT is a smooth function (and indeed satisfies a very nice reproducing kernel relation, with kernel essentially $V_g(g)$, in the case of the Gaussian it is even an analytic function over the complex “phase space”), one may think of the integral as a limit of (regular) Riemannian sums, and try to reproduce from samples on a sufficiently dense lattice only.

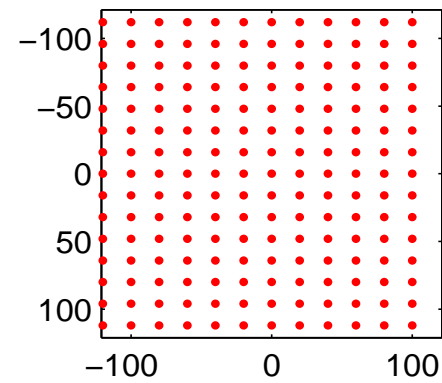
Beispiele von Gittern im Zeit-Frequenz-Bereich

Beispielfall: Signallänge $n = 240$, Gitter mit $320 = 4/3 * n$ [$180 = 3/4 * n$] Punkten:

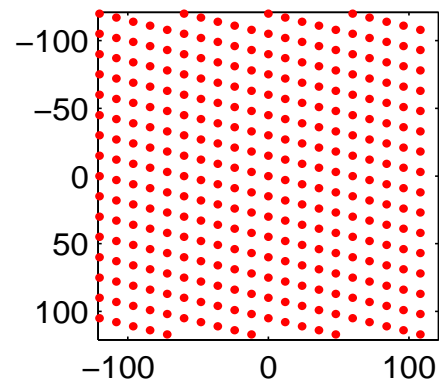


a regular TF-lattice, red = $4/3$ 

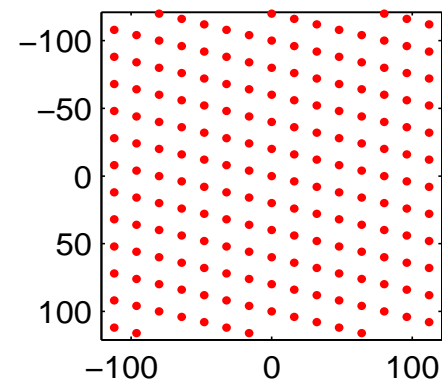
the adjoint TF-lattice



non-regular TF-lattice



its adjoint TF-lattice



Gabor Frames, Signal Darstellungen

Wenn man diese Idee näher in Betracht ziehen will, so erkennt man schnell, dass sogenannte Weyl-Heisenberg Familien, oder auch “regulare Gabor Familien” (wenn die ZF-Verschiebungen entlang eines Gitters in der ZF-Ebene erfolgen) jedenfalls dann ein Erzeugendensystem sind, wenn das “Gabor atom” schön ist (gute Konzentration um Null, und glatt: D. Gabor schlug die Gauß-Funktion vor, aber jede Schwartz-Funktion ist geeignet), und wenn das Gitter (z.B. separabler Fall: $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$) *hinreichend dicht* ist.

Gabor Frames, Signal Darstellungen

Wenn man diese Idee näher in Betracht ziehen will, so erkennt man schnell, dass sogenannte Weyl-Heisenberg Familien, oder auch “regulare Gabor Familien” (wenn die ZF-Verschiebungen entlang eines Gitters in der ZF-Ebene erfolgen) jedenfalls dann ein Erzeugendensystem sind, wenn das “Gabor atom” schön ist (gute Konzentration um Null, und glatt: D. Gabor schlug die Gauß-Funktion vor, aber jede Schwartz-Funktion ist geeignet), und wenn das Gitter (z.B. separabler Fall: $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$) *hinreichend dicht* ist.

Die Frage ist lediglich, wann genau diese Bedingung erfüllt ist. Nur für wenige konkrete Beispiele es eine genaue Antwort bekannt. Beispielsweise kann man für die Gauß-Funktion $g_0(t) = e^{-\pi|t|^2}$ bekannt. Genau dann wenn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 1$ gilt, ist die Darstellbarkeit geben (und für $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 1$ hingegen für keine einzige L^2 -Funktion).

Gabor Frames, Signal Darstellungen

Wenn man diese Idee näher in Betracht ziehen will, so erkennt man schnell, dass sogenannte Weyl-Heisenberg Familien, oder auch “regulare Gabor Familien” (wenn die ZF-Verschiebungen entlang eines Gitters in der ZF-Ebene erfolgen) jedenfalls dann ein Erzeugendensystem sind, wenn das “Gabor atom” schön ist (gute Konzentration um Null, und glatt: D. Gabor schlug die Gauß-Funktion vor, aber jede Schwartz-Funktion ist geeignet), und wenn das Gitter (z.B. separabler Fall: $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$) *hinreichend dicht* ist.

Die Frage ist lediglich, wann genau diese Bedingung erfüllt ist. Nur für wenige konkrete Beispiele es eine genaue Antwort bekannt. Beispielsweise kann man für die Gauß-Funktion $g_0(t) = e^{-\pi|t|^2}$ bekannt. Genau dann wenn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 1$ gilt, ist die Darstellbarkeit gegeben (und für $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 1$ hingegen für keine einzige L^2 -Funktion).

Für diesen “klassischen” Spezialfall ist sogar viel mehr bekannt: Jede L^2 -Funktion kann mit ℓ^2 -Koeffizienten dargestellt werden, und die Schwartz-Funktionen sind daran erkennbar, dass sie “rasch fallende Koeffizienten” (über \mathbb{Z}^2) zulassen.

Gabor Atome und duale Gabor Atome:

Hat man nun (auf irgendeine Weise) festgestellt, dass sich jedes Signal mit Hilfe eines (meist redundanten) Systems von Vektoren (der **Gabor Familie**) darstellen läßt, bleibt die Frage, wie diese Darstellung zu realisieren ist, und zwar mit möglichst geringem Rechenaufwand (was natürlich bedeutet, möglichst unter Nutzung von FFT-Methoden bzw. konkreter “dünn besetzter Matrizen”).

Gabor Atome und duale Gabor Atome:

Hat man nun (auf irgendeine Weise) festgestellt, dass sich jedes Signal mit Hilfe eines (meist redundanten) Systems von Vektoren (der **Gabor Familie**) darstellen läßt, bleibt die Frage, wie diese Darstellung zu realisieren ist, und zwar mit möglichst geringem Rechenaufwand (was natürlich bedeutet, möglichst unter Nutzung von FFT-Methoden bzw. konkreter “dünn besetzter Matrizen”).

Es zeigt sich, dass im Gegensatz zur früheren Vorstellung, wonach “non-orthogonal System” von Natur aus schon “vollen Rechenaufwand” bedeutet, das Problem *wirklich viele* versteckte Strukturen aufweist, die gut genutzt werden können.

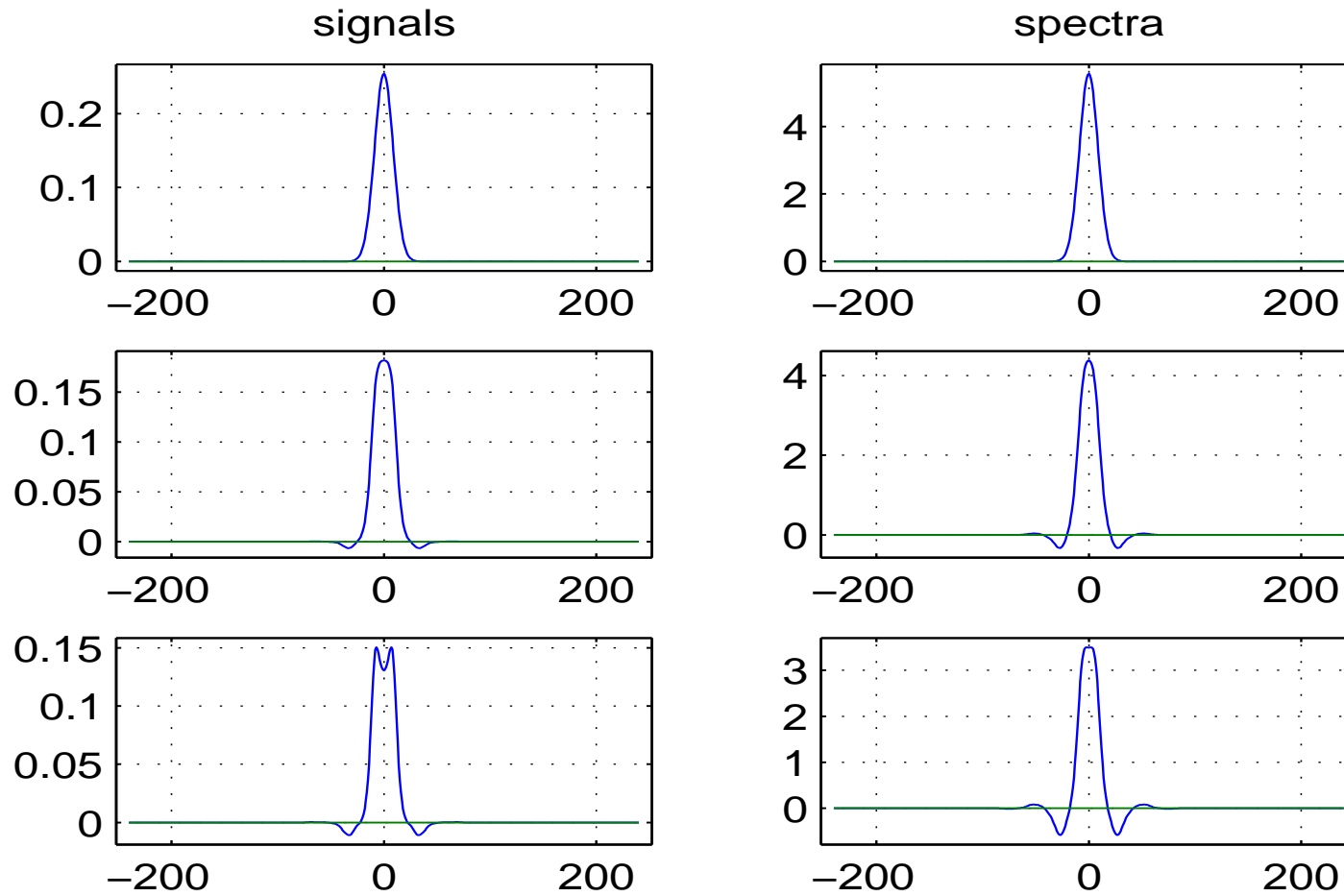
Gabor Atome und duale Gabor Atome:

Hat man nun (auf irgendeine Weise) festgestellt, dass sich jedes Signal mit Hilfe eines (meist redundanten) Systems von Vektoren (der **Gabor Familie**) darstellen läßt, bleibt die Frage, wie diese Darstellung zu realisieren ist, und zwar mit möglichst geringem Rechenaufwand (was natürlich bedeutet, möglichst unter Nutzung von FFT-Methoden bzw. konkreter “dünn besetzter Matrizen”).

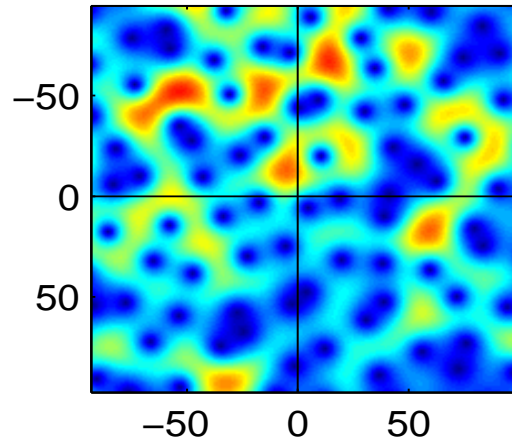
Es zeigt sich, dass im Gegensatz zur früheren Vorstellung, wonach “non-orthogonal System” von Natur aus schon “vollen Rechenaufwand” bedeutet, das Problem *wirklich viele* versteckte Strukturen aufweist, die gut genutzt werden können.

Wir beobachten, dass das Darstellungsproblem eine schöne Lösung hat: zu jedem (guten) Atom gibt es ein *duales* Gabor atom \tilde{g} , das man zur Gewinnung der Koeffizienten verwenden kann: Man bekommt die Koeffizienten (minimaler Länge), indem man als Koeffizienten die Abtastwerte der STFT mit Fenster \tilde{g} des darzustellenden Signals f an dem erzeugenden Gitter ($a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$) bestimmt, also $a(\lambda) = V_{\tilde{g}}f(\lambda) = f * M_{\omega}\tilde{g}(\lambda)$ wählt (was mittels FFT-Methoden schnell erledigt ist).

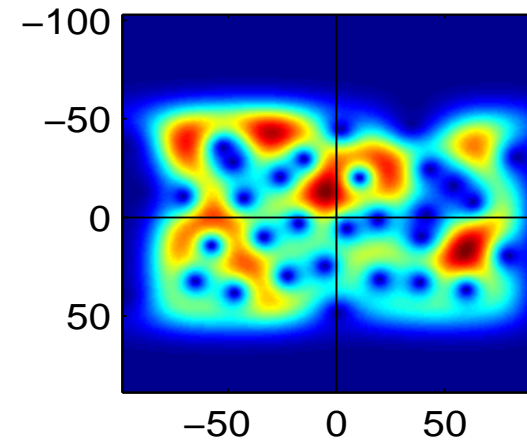
Gabor atom, with canonical tight and dual Gabor atoms



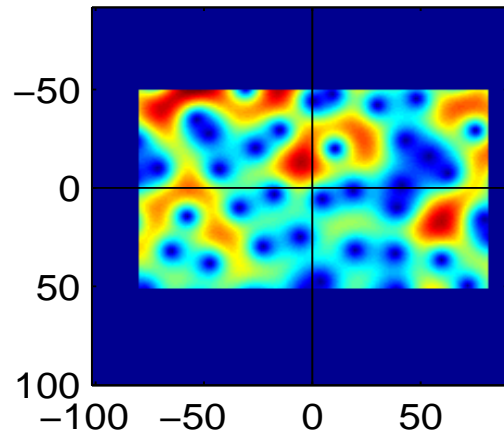
full spectrogram



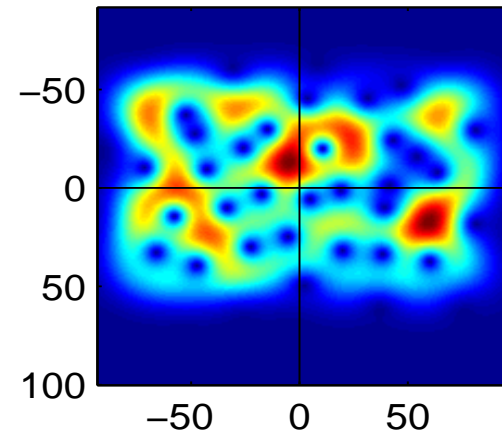
spectrogram of localized xx, I



local part of spectrogram



spectrogram of localized xx, II



Der Frame-Operator und duale Atome

Wenn man die kontinuierliche Inversionformel diskretisiert, z.B. indem man das Integral

$$f = \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} V_g f(\lambda) \cdot \pi(\lambda) g \, d\lambda.$$

für feste $L^2(\mathbb{R})$ -Funktion g mit $\|g\|_2 = 1$ durch eine Riemannsumme ersetzt (Abtastung entlang des Gitters Λ , mit $C(\Lambda) > 0$, dem Volumen des Fundamentalbereiches von Λ), so kommt man zum Studium des sogenannten Frame-Operators:

$$S(f) = S_{g,\Lambda}(f) := C(\Lambda)^{-1} \sum_{\lambda \in \Lambda} V_g(f)(\lambda) \pi(\lambda) g = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f, g_\lambda \rangle g_\lambda.$$

Dieser Operator hat einige bemerkenswerte Eigenschaften: Genau dann, wenn die Gabor-Familie $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Erzeugendensystem ist, ist der Operator $S = S_{g,\Lambda}$ *positiv definit*. Ausserdem kommutiert er stets mit den ihn erzeugenden ZF-shifts, d.h.:

$$\pi(\lambda) \circ S = S \circ \pi(\lambda), \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Somit ist die Inversion des Frame-operators $S_{g,\Lambda}$ auf die Lösung des positiv definiten Gleichungssystems $S * \tilde{g} = g$ reduziert.

Die Vertauschungsrelationen führen zu einer expliziten “dünnen Besetzung” der Matrix S : sie besteht aus wenigen Diagonalen, die ihrerseits wieder periodische Eintragungen haben (es sind b Nebendiagonalen, jede davon ist a -periodisch, im Falle eines Gitters von der Form $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$).

Das erlaubt spezielle Inversionsmethoden, etwa durch Blockmatrizen, oder “getwistete Faltung”. Andere iterative Verfahren nutzen noch stärker die Struktur von bestimmten Gabor Riesz-Basen oder bestimmte Varianten des Conjugate Gradient Algorithmus. Die Entwicklung der letzten 15 Jahre erlaubt es derzeit ohne Probleme auch mit Signallängen von mehreren Tausend Koordinaten zu hantieren.

Gabor-Multiplikatoren und Zeit-Frequenz Lokalisierung

Mit Hilfe von dualen Paaren (g, \tilde{g}) kann man beliebige Signale effizient darstellen. Besonders interessant sind *selbst-duale Fenster* (in der Gabor Analysis als “tight Gabor atoms” bekannt, im vorigen Plot in der Mitte dargestellt, samt FT derselben, rechts).

Hat man nun eine Zeit-Frequenz-Darstellung (siehe Bilder auf den ersten Folien), so kann man daran interessiert sein, die “interessanten Details” zu isolieren (z.B. Caruso’s Stimme, zwecks Remastering). Das ist ja gerade einer der Vorteile von Gabor Systemen, dass die Koeffizienten Bausteinen mit einer bestimmten Bedeutung (eine bestimmte Frequenz zu einer bestimmten Zeit) zugeordnet sind, die intuitiv und praktisch relevant ist.

Es ist daher naheliegend, eine *Lokalisation* etwa dadurch durchzuführen, dass man die interessanten Gabor Koeffizienten mit 1 multipliziert, und die unwichtigen mit der Zahl 0. Dass man auf diese Weise trotzdem keinen Projektionsoperator bekommt, werden wir noch später anhand einer Analogie im \mathbb{R}^2 diskutieren bzw. demonstrieren.

Das Ron-Shen Dualitätsprinzip

Die weiter oben gezeigten Gitter sind nicht nur prototypische Beispiele von *feinen Gittern*, die zu Gabor Frames führen (man hat genügend viele Bausteine um damit alle Signale zu erzeugen), oder *groben Gittern*, die weniger als n Bausteine haben, welche dafür aber linear unabhängig sein können. Es gibt einen (z.B. in der Wavelet Theorie nicht vorzufindenden) interessanten Aspekt (das Resultat kann mit Hilfe der symplektischen Fourier Transformation gezeigt werden):

Theorem 1 (Ron-Shen Dualitäts-Prinzip). *Es sei Λ irgendein Gitter in $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Dann gilt: Die Familie $(\pi(\lambda)g)_{\lambda \in \Lambda}$ ist genau dann ein Erzeugendensystem für \mathbb{C}^n (einen sog. Gabor Frame) wenn dasselbe Atom g unter der adjungierten Gruppe Λ° eine (Gabor) Riesz Folge $(\pi(\lambda^\circ)g)$ bildet. Weiters wird die biorthogonale Riesz Folge (bis auf Normierung) von dem Element \tilde{g} erzeugt, welches auch den dualen Frame generiert. Hierbei gelten folgende Definitionen:*

$$\Lambda^\circ = \{\lambda^\circ : [\pi(\lambda), \pi(\lambda^\circ)]\} \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda.$$

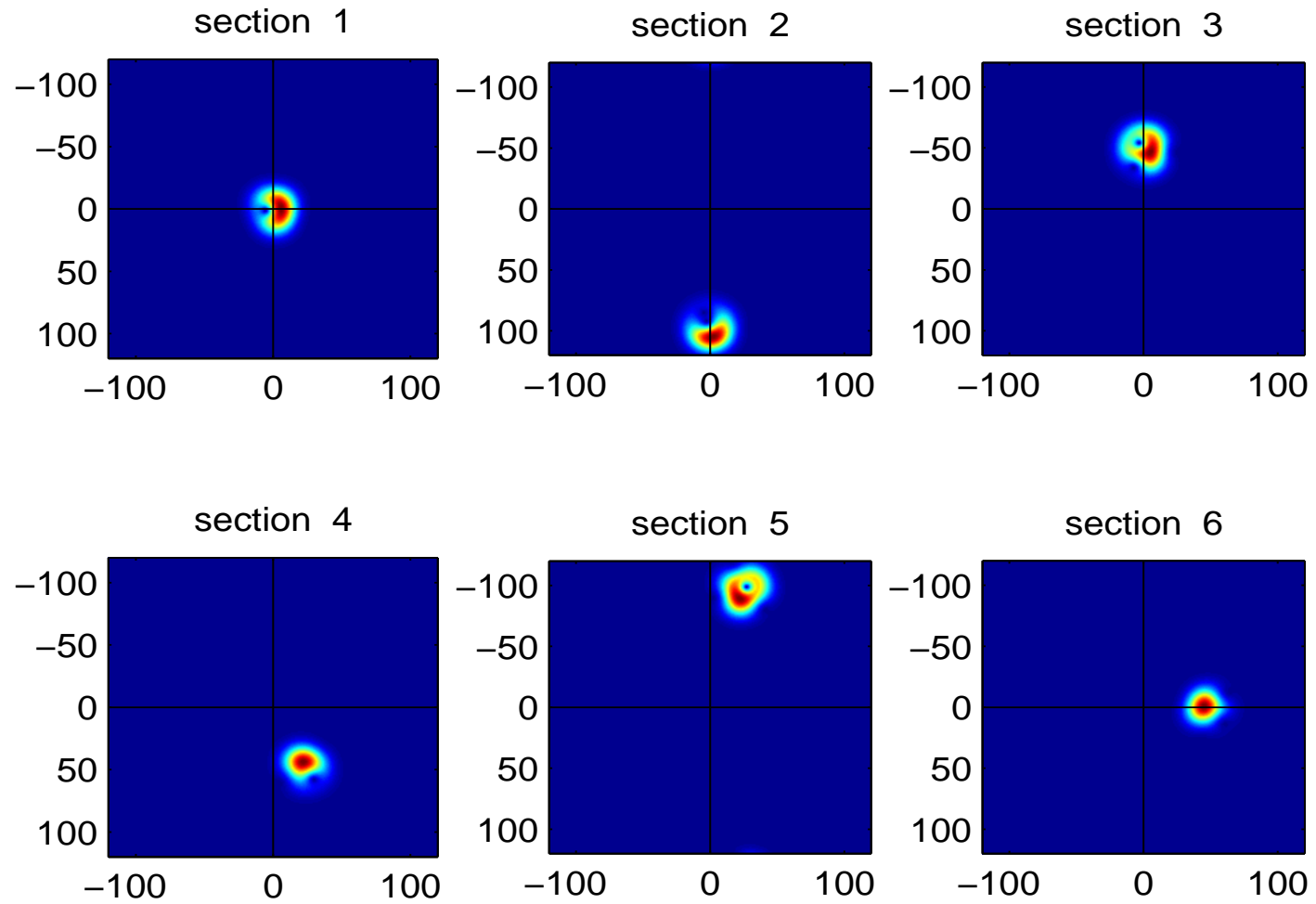
Beispiel: $\Lambda = a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}, \Lambda^\circ = (1/b)\mathbb{Z} \times (1/a)\mathbb{Z}$.

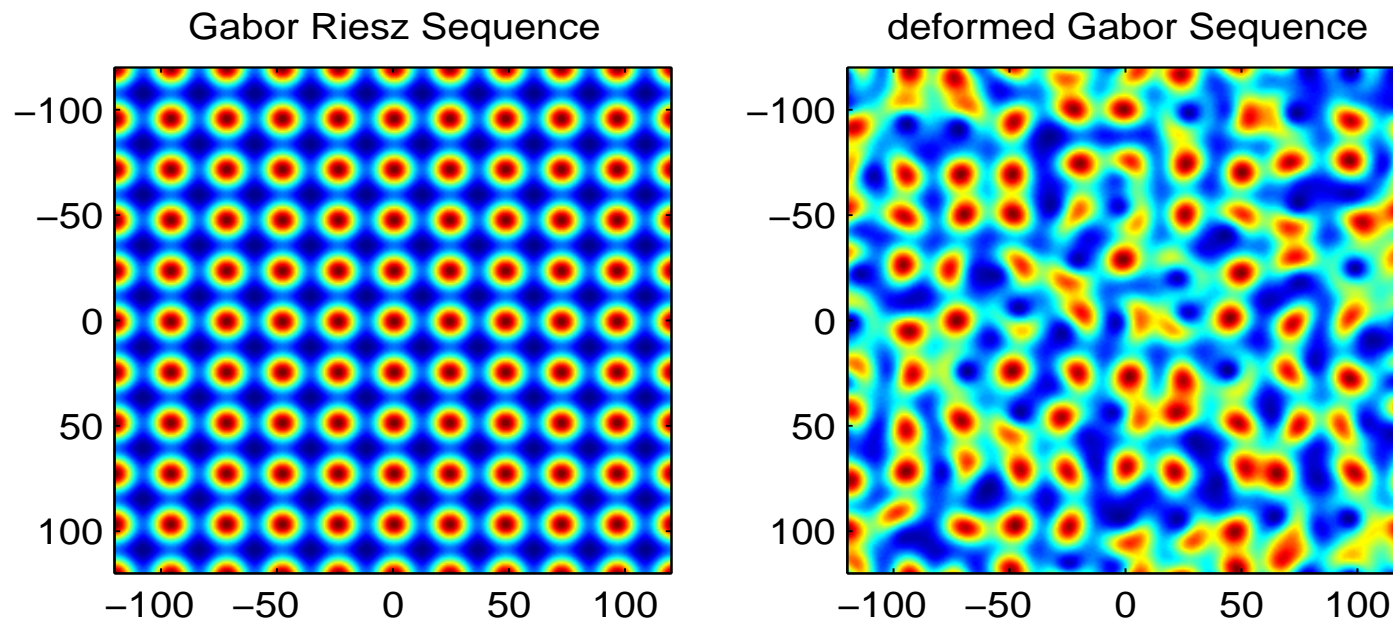
Anwendungen im Bereich “Wireless Communication”

Im Bereich der “drahtlosen Kommunikation” (z.B. zwischen Basis-Stationen und mobilen Einheiten, Handys etc.) geht es um einen komplementären Aspekt: Man “verpack” Information (in Form von gegebenen Koeffizienten) indem man eine Linear-Kombination von Gabor-Atomen bildet, welche dann im Zuge der Übertragung (modelliert als ein langsam zeit-variantes System) in *leicht deformierter* Form beim Empfänger ankommen. Die Aufgabe eines effizienten Übertragungssystems ist es, trotz dieser Störungen digitale Information trotzdem weitgehend fehlerfrei zu übertragen.

Die Charakterisierung eines solchen “Kanals” (die Strecke zwischen der Basis-Station und dem sich möglicherweise bewegenden Empfänger) erfolgt durch einen maximalen Zeit-Shift (“multipath propagation”) und eines maximalen Doppler-Shifts.

Klarerweise müssen die Gabor Atome (vor der Übertragung) eine Gabor Riesz Folge sein (d.h. insbesondere linear unabhängig) sein, ja sogar noch ein wenig separiert sein, und der Kanal darf (im Zeit-Frequenz-Bild) keine zu stark verschmierende Wirkung haben. Wir schauen uns das nun anhand von Bildern an:





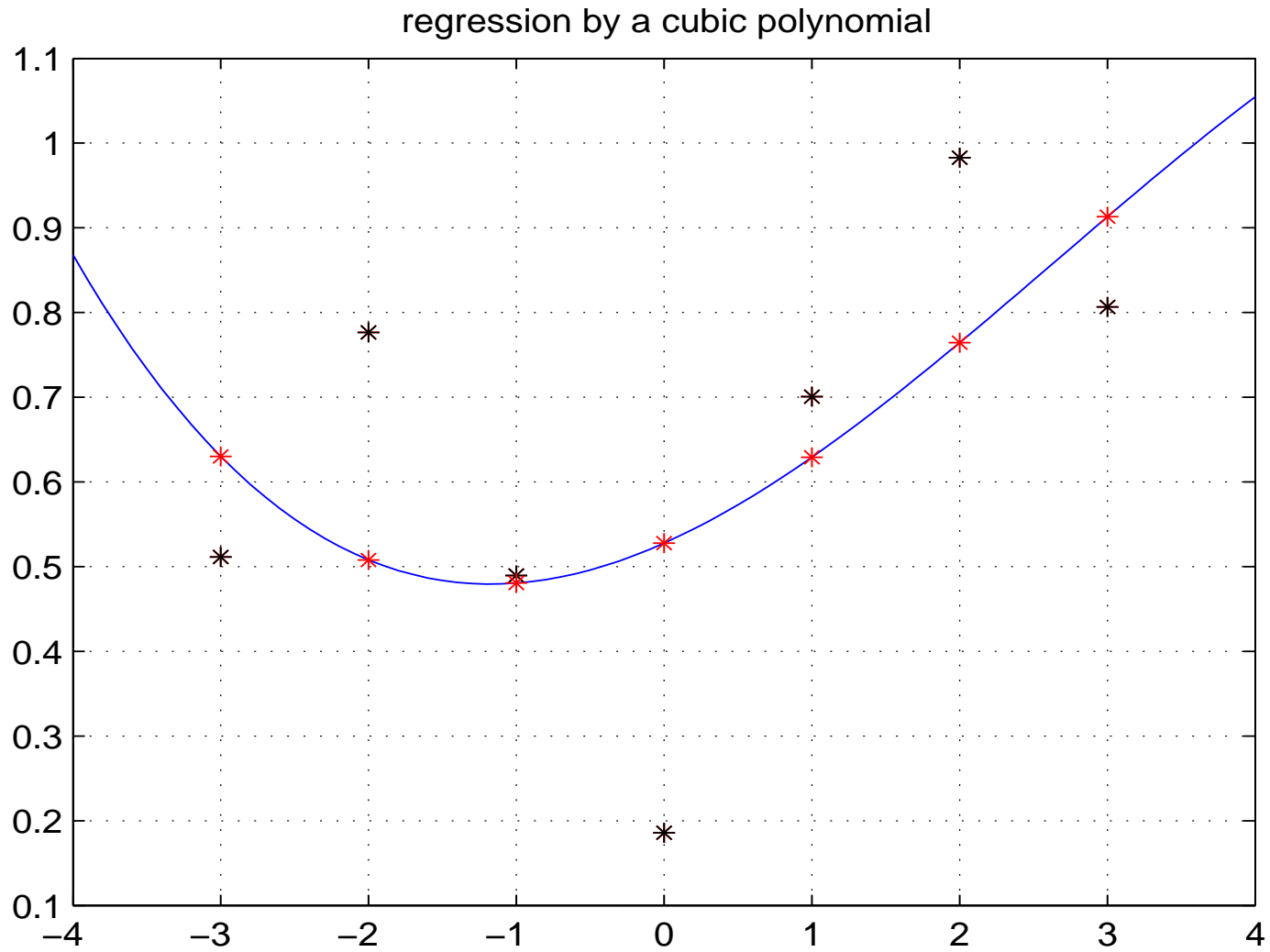
Und wo steckt hier die Lineare Algebra ?

Erinnern wir uns an die Grundprinzipien: Jedes lineare Gleichungssystem kann in der Form einer Matrix-Gleichung der Form geschrieben werden:

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad .$$

Die Eigenschaften der Matrix \mathbf{A} entscheiden über die Lösbarkeit des Gleichungssystems. IDEALERWEISE wünscht man sich eine quadratische und invertierbare Matrix, um sicherzugehen, dass für *jede* mögliche rechte Seite eine *eindeutig bestimmte* Lösung \mathbf{x} gefunden werden kann.

Das bedeutet im Falle der Polynominterpolation, dass die Anzahl der gesuchten Koeffizienten genau der Anzahl der Datenpunkte entspricht, was aber weniger den praktischen Gegebenheiten entspricht:



Klarerweise bilden die möglichen Datenvektore (rote Punkte) über $-3, -2, \dots, 2, 3$ einen 4-dimensionalen Raum von Vektoren im \mathbb{R}^7 , und folglich ist die Interpolationsaufgabe genau dann lösbar, wenn der vorgegeben Datenvektor in diesem Teilraum liegt, während man im allgemeinen Fall (schwarze Punkte) einen Least-Squares Fit vornehmen muss!

In Matrixform ist das Gleichungssystem $\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau dann lösbar wenn \mathbf{b} im Spaltenraum $\mathbf{Sp}(\mathbf{A})$ liegt (das System ist dann *konsistent*).

Der Datenfit kann hier so verstanden werden: Projiziere den gegebenen Datenvektor orthogonal auf den Spaltenraum, und bestimme dann das eindeutig bestimmte Polynom, das “durch die roten Punkte geht”.

Eine vollkommen anderer Situation haben wir, wenn man ein Erzeugendensystem des \mathbb{R}^n hernimmt. Dann ist zwar jeder Vektor \mathbf{b} darstellbar, aber auf mannigfache Weise.

Je zwei Lösungen des Gleichungssystem unterscheiden sich nur um eine Lösung des homogenen Gleichungssystems.

Wirkung von Frame Multipliern im \mathbb{R}^2

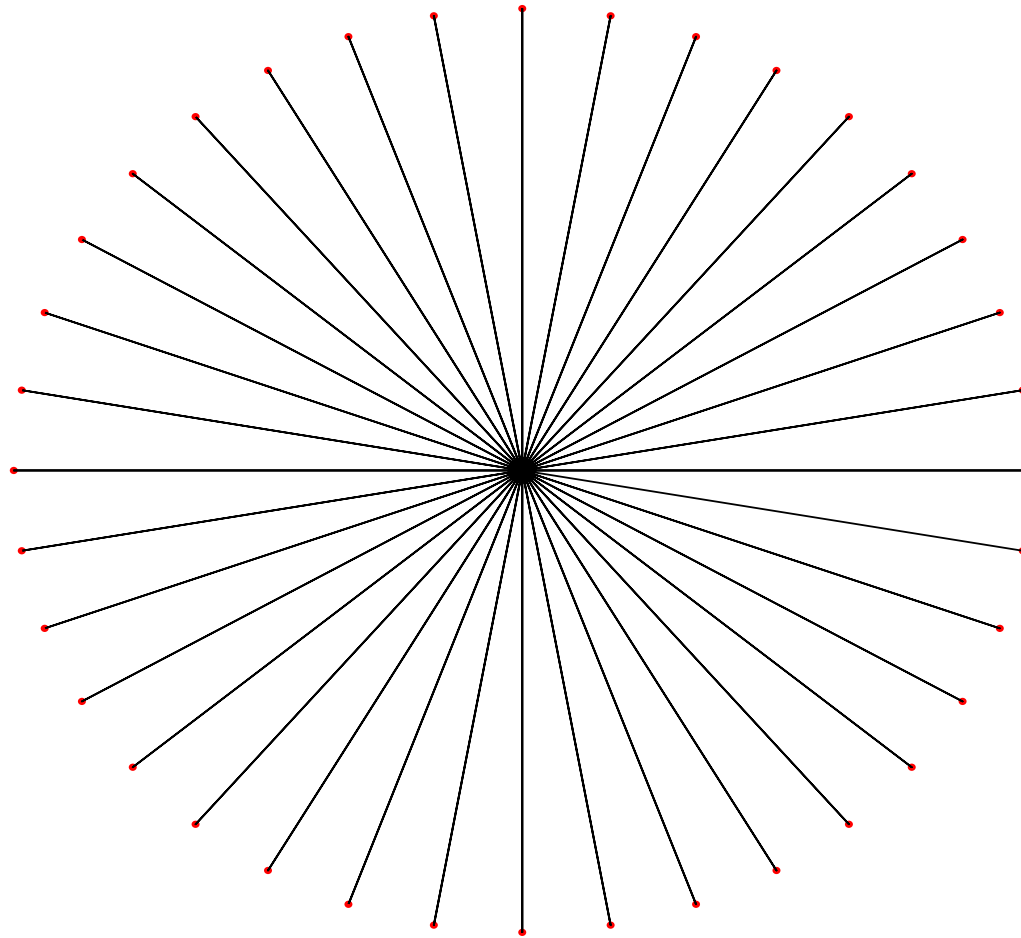
In der Folge sollen zwei Bilder präsentiert werden, die die Wirkung von Gabor Multipliern illustrieren können.

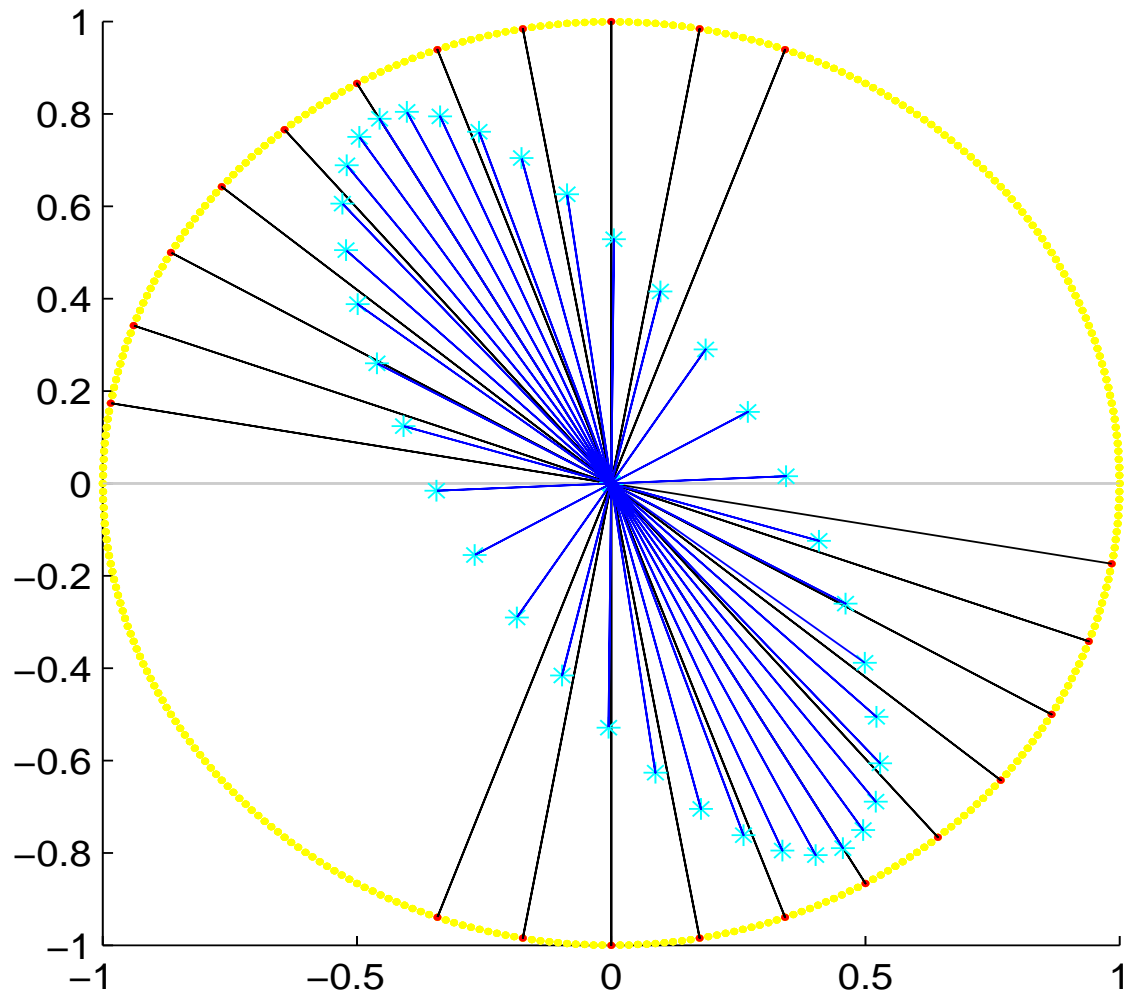
Das erste Bild zeigt einfach einen Frame von Redundanz 18 in der Ebene. Da diese ein zwei-dimensionaler reeller Vektorraum ist, sprechen wir von 36 Vektoren (oder wenn man will, die Vereinigung von 18 Orthonormalbasen). Bei Entsprechender Normierung dieser Vektoren (mit dem Faktor $1/\sqrt{18}$) erkennt man leicht, dass dies eine sogenannter “tight frame” ist (ein *straffer Rahmen*), der also folgende Identität hervorbringt:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{36} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

Definiert man nun einen Operator, der “auf den Koeffizienten operiert, indem er die Vektoren im Bereich 0 bis 60 Grad liegen, so erhalten wir eine symmetrische Matrix (es ist immer noch eine reelle Lin. Komb. von Projektionsmatrizen), deren Wirkung im zweiten Plot (hellblaue Sterne sind die Bilder der \mathbf{u}_k 's) dargestellt wird. Hauptachse liegt im Inneren des Durchlassbereichs, Nebenachse im Inneren des Nullsetz Bereiches.

a frame of redundancy 18 in the plane





Jeder Vektor \mathbf{b} hat somit unendliche viele Darstellungen, denn die Syntheseabbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} * \mathbf{x}$ hat ja einen nicht-trivialen Kern. Es ist aber ein bewährtes Rezept, die Lösung mit minimaler Norm zu wählen. Diese ist die eindeutig bestimmte Lösung, die außerdem im Zeilenraum von \mathbf{A} liegt. Bekanntlich bildet dieser ja das orthogonale Komplement zum Nullraum der Matrix \mathbf{A} .

Man kann also die eindeutig bestimmte “minimal norm” Lösung des Problems, d.h. den kürzest möglichen Vektor \mathbf{x} im Zeilenraum finden.

IN BEIDEN Fällen bekommt man die MNLSQ-Lösung des Problems mit Hilfe der Moore-Penrose oder einfach *Pseudo-Inversen!*

HARALD SCHWAB, SKETCH

Geometrisch kann man sich die Sache leicht wie folgt vorstellen. Zu jeder Matrix \mathbf{A} gibt es einen Zeilenraum sowie einen Spaltenraum. Im Falle des Standardformats einer komplexen $m \times n$ Matrix ist der Spaltenraum ein Teilraum des \mathbb{C}^m , und der Zeilenraum ist ein Teilraum des \mathbb{C}^n (von dem die lineare Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} * \mathbf{x}$ startet).

Diese beiden Teilräume haben natürlich jeweils ein orthogonales Komplement, welche leicht als Nullraum von \mathbf{A}' (\mathbf{A} transponiert und konjugiert, auch Linkskern von \mathbf{A} genannt) bzw. Nullraum von \mathbf{A} identifiziert werden kann.

Wie man bekanntlich mit Hilfe der klassischen Gauss-Elimination leicht feststellen kann, sind Spaltenrang und Zeilenrang gleich. Zur Erinnerung: die Zeilen der reduzierten Zeilenstufenform von \mathbf{A} sind auch eine Basis des Zeilenraumes von \mathbf{A} , denn die einzelnen Schritte der Gauß-Elimination können als Links-Matrix-Multiplikationen mit elementaren (invertierbaren) Matrizen interpretiert werden, und solche Operationen bewahren den Zeilenraum einer Matrix.

Andererseits bewahren solche Links-Multiplikationen die lineare Unabhängigkeit von Systemen von Spaltenvektoren (nicht die Räume selber), sodass man eine Basis des Spaltenraum leicht dadurch findet, dass man diejenigen Spalten der Originalmatrix \mathbf{A} nimmt, in denen sich die Pivotelemente finden. Dies bilden offenbar eine maximal linear unabhängige Familie, und somit eine Basis (des Spaltenraumes). Da auf diese Weise die Dimension von Zeilen- bzw. Spaltenraum mit der Zahl der Pivotelemente als gleich erkannt werden kann, bekommen wir: Zeilenrang ist gleich Spaltenrang.

Die geometrische Interpretation liefert aber noch mehr: die Abbildung selbst, als $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} * \mathbf{x}$, eingeschränkt auf den Zeilenraum (genauer: den Spaltenraum von \mathbf{A}'), liefert eine Bijektion zwischen dem Zeilenraum von \mathbf{A} und dem Spaltenraum von \mathbf{A} . Wir haben also einen "natürlichen Isomorphismus zwischen Zeilen und Spaltenraum (und somit nochmals: gleiche Dimension).

Frames und Riesz Basen

In allgemeinen Hilberträumen wird das Konzept der linearen Unabhängigkeit sinnvollerweise noch mit einer Stetigkeits-Forderung verknüpft (um die Vergleichbarkeit mit dem \mathbb{C}^m herzustellen):

Definition 1. *Eine Folge (g_k) in einem Hilbertraum \mathcal{H} heißt ein frame, wenn es gilt, dass die Normen von $h \in \mathcal{H}$ und die “Koeffizientenorm” $(\sum_k |\langle h, g_k \rangle|^2)^{1/2}$ äquivalent sind.*

Man kann relativ leicht zeigen, dass in diesem Zusammenhang die Darstellbarkeit von beliebigen Elementen $h \in \mathcal{H}$ mit ℓ^2 -Koeffizienten gegeben ist.

Definition 2. *Eine Folge (h_n) in einem Hilbertraum \mathcal{H} heißt Riesz basic sequence wenn für jede quadratisch summierbare Folge (c_n) gilt: Die norm von $\mathbf{c} = (c_n)$ in ℓ^2 ist mit der Norm des Elements $\mathbf{x} = \sum_n c_n \mathbf{h}_n$ in \mathcal{H} vergleichbar.*

Mit Hilfe des Biorthogonalsystems (\widetilde{h}_n) kann man die Projektion auf den von einer derartigen Riesz-sequence erzeugten Teilraum \mathcal{V} bestimmen. $P_{\mathcal{V}}h = \sum_n \langle h, h_n \rangle \widetilde{h}_n$.

Ausblick: Funktional-analytische Fragen

Die Darstellung in diesem Vortrag haben die Aspekte der linearen Algebra in den Vordergrund gestellt, **Erzeugendensysteme** und **lineare unabhängige Familien**. Die entsprechenden Begriffe sind die sogenannten **Frames** bzw. die **Riesz Basis-Folgen**.

Systeme, die beide Eigenschaften miteinander vereinigen, sind in der Linearen Algebra einfach **Basen**. In allgemeinen (separablen) Hilberträumen erhält man (unter Forderung nach der Stabilität der Koeffizienten-Abbildung) den Begriff der **Riesz Basen**.

Wenn man D. Gabor's Vorschlag (von 1946) richtig interpretiert, kommt man zu dem Schluß, dass er vermutlich der Meinung war, dass die Weyl-Heisenberg Familie (heute: Gabor-Familie), die man durch die Wahl von $a = 1 = b$ bekommt, eine Riesz-Basis für den Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist.

Wie wir heute wissen, bildet diese Familie (das sogenannte von-Neumann Gitter, auch kritisches Gitter genannt) keinen Frame für $L^2(\mathbb{R}^d)$ (selbst mit beschränkten Koeffizienten kann man nicht ganz $L^2(\mathbb{R}^d)$ darstellen). Andererseits ist die Familie nicht linear unabhängig: Man kann jedes seiner Elemente als konvergente (unendliche) Reihe von all den anderen Elementen schreiben.

WEB Adresses

`http://www.nuhag.eu`

EUCETIFA: `http://univie.ac.at/nuhag-php/eucetifa`

MOHAWI (WWTF): `http://univie.ac.at/nuhag/mohawi`

HASSIP (EU RTN): `http://www.cmi.univ-mrs.fr/HASSIP/`

Univie Initiativkolleg: `http://univie.ac.at/nuhag/ik/`

NAHA (computational sciences): `http://univie.ac.at/nuhag-php/naha/`