

Funktionalanalysis, WS 2005/06, by HGFei

Hinweise zum Inhalt (laufende Chronologie)

Version vom 15. Oktober 2005 (HGFei)

1. Stunde 1:

TEST: $\ell^\infty, (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty), \ell^1, (\ell^1, \|\cdot\|_1), \ell^2, (\ell^2, \|\cdot\|_2)$

QUESTION: Was ist Funktionalanalysis?

Antwort: Studium von linearen Gleichungssystemen in (nicht notwendigerweise endlich-dim.) linearen Räumen, typischerweise Banachräumen oder Hilberträumen, welche noch viele der wesentlichen Strukturen des R^d haben.

Wiederholung: Begriff des Vektorraumes über einem Körper (die Skalaren, die auf den Vektoren mittels der sog. Skalarmultiplikation wirken)

Der Raum aller Folgen ω mit der koordinatenweisen Addition und Skalarmultiplikation.

Der normierte Raum aller beschränkten Folgen: $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

Jede Nullfolge ist eine beschränkte Folge.

2. Stunde 2

Proposition: Der Raum der Nullfolgen c_0 ist genau die abgeschlossene lineare Hülle der Einheitsvektoren in dem normierten Raum $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis in 2 Teilen: Jede Nullfolge ist durch sog. endliche Folgen glm. (= gleichmässiger) approximierbar, d.h. $\|x - y^n\|_\infty \mapsto 0$, wenn y^n der "Anfangsabschnitt" der Folge $x = (x_k)_{k=0}^\infty$ ist.

Umgekehrt kann man zeigen, dass der gleichmäßige Limes von Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist (gutes Test-Beispiel). Daraus folgt (da die lineare Hülle der Einheitsvektoren offenbar die "endlichen Folgen" sind, und dies offenbar ein Teil von c_0 sind) dass auch die abgeschlossene (!) lineare Hülle

Konzept der Banachräume, d.h. der vollständigen, normierten Räume.

3. Stunde 3 Weitere Beispiele von Banach Thema Vollständigkeit von normierte Räumen.
4. Stunde 4 $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ als Banachraum

Zweite Woche

Material zu “Konvergenzkriterien für Reihen in Banach-Räumen”

Definition: Eine lineare Abbildung zwischen zwei normierten Räumen heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass $\|T(x)\| \leq C \cdot \|x\|$ gilt (mit den jeweiligen Normen), d.h. wenn die Länge des Bildvektors bis auf einen “erlaubten” Streckungsfaktor durch die Länge des Argumentes kontrolliert werden kann. Das *infimum* ueber alle möglichen Konstanten wird als Operatornorm von T bezeichnet.

Various statements to be discussed:

1. Propositionen (s. Proseminar): Jede Teilfolge einer Cauchyfolge ist wieder eine Cauchyfolge. Konvergiert eine Teilfolge einer CF, dann konvergiert die CF selber.
2. Jeder abgeschlossene Teilraum eines Banachraumes ist selbst wieder ein Banachraum.
3. Jeder “Kern” (= Nullraum) einer stetigen linearen Abbildung $B_1 \mapsto B_2$ ist ein abgeschlossener Teilraum von B_1 .

SATZ: Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum genau dann, wenn jede absolut konvergente Reihe mit $\sum_n \|x^n\| \leq C$ auch konvergiert und $z = \sum_n x^n$ erfüllt $\|z\| \leq C$.

BEWEIS: In der einen Richtung zeigt man, dass die Partialsummen einer absolut konvergenten Reihe (“obviously”) eine Cauchyfolge bilden. Die Vollständigkeit impliziert dann dass die Reihe konvergiert, man benennt (so wie im Reellen) den Limes mit $\sum_n x^n$. Da die Norm auf jedem normierten Raum stetig ist, folgt auch sofort dass $\|\sum_{n=1}^{\infty} x^n\| = \lim_N \|\sum_{n=1}^N x^n\| \leq \sum_n \|x^n\|$ gilt.

Umgekehrt sei eine Cauchyfolge gegeben. Die Beweisstrategie ist die Verdünnung dieser Cauchyfolge, um die verdünnte Folge dann als Folge von

Partialsummen einer abs. konvergenten Folge zu schreiben. Kann man nämlich die Konvergenz einer Teilfolge beweisen, so folgte daraus die Konvergenz der “ganzen Cauchyfolge” (Exercise).

Um nun die passende Teilfolge einer gegebenen Cauchyfolge (x_n) zu finden, wendet man die Cauchybedingung auf eine Folge von positiven Zahlen $\varepsilon_k = \eta/2^k$ an, $k = 1, 2, \dots$. Für jedes ε_k gibt es einen Index $n_k \in N$, und o.B.d.A. sei $n_{k+1} > n_k$. Somit ist $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ eine Folge mit der zusätzlichen Eigenschaft dass $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \varepsilon_k$. Daraus folgt aber sofort, dass die Folge $r_1 = x_1, r_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ für $k \geq 2$ eine absolut konvergente Reihe $\sum_j r_j$ bildet. Nach Voraussetzung konvergiert eine solche Reihe. Da die Partialsummen aber gerade die Elemente x_{n_k} sind, folgt die Konvergenz der Teilfolge.

Def.: Eine Reihe (x_k) heisst *unbedingt konvergent* wenn die Konvergenz der Partialsummen unabhängig von der Realisierung der Aufzählung konvergent sind und der Grenzwert NICHT von der konkreten Aufzählung abhängt.

Siehe für Details auch z.B.

<http://www.math.gatech.edu/heil/papers/bases.pdf>,

“A Basis Theory Primer”, in der Fragen über die Eigenschaften von Basen in Banachräumen recht übersichtlich dargestellt werden.

SATZ: (Absolute Konvergenz impliziert unbedingte Konvergenz):

Lineare Funktionale: Lineare Operatoren von einem normierten Raum in den Grundkörper (d.h. R oder C , mit dem üblichen Absolutbetrag als Norm).

Beispiel von linearen Funktionalen: Dirac-Maße “bei x ”, bezeichnet als δ_x , definiert auf $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$, mit $f \mapsto \delta_x(f) := f(x)$ (Evaluationsabbildung).

Ex.: Diese Abbildung ist nicht expansiv, d.h. $\|\delta_x\| \leq 1$ (und auch leicht festzustellen: die Norm dieses Funktional ist gleich (!) eins!).

Dritte Woche

Zum Aufwärmen:

Begriffe: Dichtheit (in einem top. Raum sinnvoll), eine Menge heißt *total* in einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$, wenn die abg. lineare Hülle der Menge der ganze normierte Raum ist.

Lemma: (a) Hat man eine lineare Abbildung auf einem Vektorraum definiert, so genuegt es, die Stetigkeit auf einem dichten Teilraum zu testen, d.h. $\|T\| = \sup\{\|Tx\|, x \in D, \|x\| \leq 1\}$, wobei D ein beliebiger dichter Teilraum sein kann.

(b) Stimmen zwei beschr. lineare Abb. auf einer dichten Teilmenge überein, ja sogar nur auf einer *totalen Teilmenge*, so sind sie gleich.

Triviale Folge: stimmen zwei beschr. lineare (beide müssen beschr. sein!) auf einer dichten Teilmenge überein, dann sind sie gleich!

Beweis: Übungsaufgabe (?)

Fortsetzungssatz f. lineare Abbildungen: Ist eine lineare Abbildung von einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ in einen *Banachraum* $(B, \|\cdot\|)$ auf einem dichten Teilraum D von V beschränkt, so gibt es eine eindeutig bestimmte beschr. und lineare Fortsetzung $\tilde{T}$ auf den ganzen Raum, als von V nach B . Die Fortsetzung hat die gleiche Operatornorm wie T , d.h. $\|\tilde{T}\|_{V \rightarrow B} = \|T\|_{D \rightarrow B}$.

Beweisidee: Eine beschränkte lineare Abbildung bildet eine CF in eine CF ab. Hat man also ein allgemeines Element in $v \in V$, so geügt es, diese durch eine Folge (d_n) aus D zu approximieren. Diese Folge ist natürlich eine Cauchyfolge (CF) in B , und weil $(B, \|\cdot\|)$ vollst. ist, konvergiert diese Folge auch! Daher ist es naheliegend, die Fortsetzung $\tilde{T}$ von T auf ganz B per $\tilde{T}(v) = \lim_n T(d_n)$ zu definieren. Man muß nur noch feststellen, dass $\tilde{T}$ wohldefiniert ist (d.h. von der speziellen Wahl der approx. Folge (d_n) unabh. ist). Daraus folgt auch gleich dass sie eine Fortsetzung von T ist (denn für $d \in D$ kann man die konstante Folge $d_n = d$ für alle $n \geq 1$ nehmen. Es ist der LeserIn überlassen, die Linearität zu beweisen. Schliesslich gilt $\|\tilde{T}(v)\| = \lim_n \|T(d_n)\| \leq \|T\| \cdot \lim_n \|d_n\|$, somit hat $\tilde{T}$ keine größere Operatornorm als T . Als Fortsetzung kann $\tilde{T}$ aber keine kleinere Operatornorm haben (*sup* wird über eine größere Familie genommen, ganz V statt nur D). Damit ist der Beweis fertig.

Def.: Äquivalenz von Normen (wenn die Identität einen Isomorphismus auf einem Raum versehen mit zwei Normen ist).

Satz: Wenn der Zielraum ein Banachraum ist, dann ist er Raum der

Operatoren von einem festen normierten Raum in diesen Banachraum (mit der Operatornorm versehen) ein Banachraum. Das gilt insbesondere f.d. *Dualraum*, den Raum der (beschr.) linearen Funktionale auf einem beliebigen normierten Raum (weil ja der Grundkörper R bzw. C vollständig ist!). Der Eindeutigkeitssatz oben impliziert dass es neben $\tilde{T}$ keine andere stetige, linear Fortsetzung gibt.

Interessante Erweiterungen dieser Argumente liefert folgenden Satz:

Def.: Eine Menge M in einem normierten Raum heißt beschränkt, wenn es ein $C_1 > 0$ gibt, mit $\|m\| \leq C_1$ f.a. $m \in M$.

Wir werden diesen Begriff auf Teilmengen aus dem Raum der linearen Operatoren $\mathcal{L}(V, B)$ anwenden. Eine Menge von linearen Operatoren ist also genau dann beschränkt, wenn es nicht nur für einen einzelnen Operator T eine Konstante $C > 0$ gibt, mit $\|T(v)\| \leq C\|v\|$, sondern eine *gemeinsame* Konstante C_1 gibt.

SATZ: Es sei $(T_k)_{k \geq 1}$ eine beschränkte Folge von linearen, beschränkten Operatoren von einem normierten Raum V nach einem Banachraum B , mit D einem dichten Teilraum von V (wie oben). Es gelte nun: $T_n(d) \rightarrow T_0(d)$ f.a. $d \in D$, und die Menge sei beschränkt in der Menge der linearen Operatoren von V nach B (mit den jeweiligen Normen). Dann konvergiert die Folge $T_n(v)$ f.a. $v \in V$, etc.

Beweis: Nach dem vorhergehenden Satz macht es keinen Unterschied, ob man die Operatoren T_k auf ganz V oder nur auf dem dichten Teilraum D definiert ansieht. Die entscheidende Abschätzung ist die folgende (zunächst für beliebiges $n \geq 1$ gültig (2mal Dreiecksungleichung):

$$\|T_k(v) - T_0(v)\| \leq \|T_k(v) - T_k(d_n)\| + \|T_k(d_n) - T_0(d_n)\| + \|T_0(d_n) - T_0(v)\|.$$

Nennen wir die drei Summanden rechts I , II bzw. III . Da die Folge (d_n) gegen v konvergiert, gibt es zu $\varepsilon > 0$ einen Index $N_1 \geq 1$ sodass $\|d_n - v\| < \varepsilon/(3 \cdot C_1)$ gilt, für $n \geq N_1$. Wir können o.b.d.A. auch $\|T_0\| \leq C_1$ annehmen (hier zunächst notfalls C_1 durch $\max(C_1, \|T_0\|)$ zu ersetzen). Somit haben wir, z.B. für den Index $n = N_1$ Kontrolle über die Terme I und III (jeweils $\leq \varepsilon/3$). Haben wir nun aber n fixiert, so können wir den Index k so wählen, dass auch der Term II durch $\varepsilon/3$ abgeschätzt werden kann (dabei ist natürlich wichtig, dass man die Abschätzung von I und III *unabhängig* von der Wahl von k machen kann! $\diamond$

Proposition: Auf einem endlich-dim. Raum sind je zwei Normen äquivalent.

Operatoren von endlichem Rang: Wenn das Bild endlich-dimensional ist (entstehen als linear Kombinationen der Operatoren vom Rang 1, welche

durch ein beschr. lin. Funktional und einem (Ziel)Vektor realisiert werden (Beispiele ...).

Satz: Jeder Operator von endlichem Rang ist stetig (bzw. beschränkt). (Beweis: jetzt oder später?)

Hinweis: auf jedem unendlich-dimensionalen (d.h. nicht endlichdimensionalen) Teilraum gibt es auch unstetige lineare Funktionale.

VORSCHAU:

Normierte Algebren, Banachalgebren, Stetigkeit der Multiplikation, automatische Stetigkeit der Inversion auf der Menge der invertierbaren Elemente (welche eine offene! Teilmenge der Algebra bilden).

Die *Vervollständigung eines normierten Vektorraumes* (im Sinne der Vervollständigung als metrischer Raum: Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen, in Analogie zu den reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche), als Banachraum betrachtet, ist eines der wichtigsten Prinzipien der Funktionalanalysis.

Thema Vervollständigung:

Satz: Jeder normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ läßt sich in einen Banachraum B dicht einbetten (isometrisch). Jede beschr. lineare Abbildung zwischen normierten Räumen läßt sich eindeutig zu einer beschr. linearen Abbildung zwischen den entsprechenden Vervollst. fortsetzen. Insbesondere sind je 2 Vervollständigungen isomorph (d.h. als Banachräume gleichwertig).

Vergleiche das (nicht-lineare) Beispiel aus der Analysis: Vervollständigung des Körpers der rationalen Zahlen zu $\mathbb{R}$ und die Abbildung $(x, y) \mapsto x^y$.

Weitere wichtige Begriffe: Quotientenraum (nach einem *abgeschlossenen!*) Teilraum eines normierten Raumes: ist selbst wieder ein Banachraum mit der sog. Quotientennorm.

Lemma: Der Quotientenraum erbt von seinem übergeordneten Raum die Vollständigkeit!

Produkte: Das Produkt normierter Räume ist wieder ein normierter Raum, mit (verschiedenen, zueinander äquivalenten) Normen versehen, wie etwa $\|(x, y)\|_\infty = \max(\|x\|, \|y\|)$, oder $\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$ oder $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{(\|x\|^2 + \|y\|^2)}$.

Bemerkung: Bei "endlichen Produkten" kann man leicht zeigen, dass jede dieser Normen einen Konvergenzbegriff erzeugt, der mit der "koordinatenweisen Konvergenz" übereinstimmt.

Closed Graph Theorem

Es gilt bekanntlich (für Abbildungen zwischen metrischen Räumen), dass eine Funktion stetig ist, wenn konvergente Folgen in konvergente Folgen (und dann automatisch mit dem “richtigen” Limes) überführt werden, als wenn IMMER gilt $f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n)$. Für jede beschränkte (also stetige) lineare Abbildung $T : V \mapsto W$ zwischen normierten Räumen gilt daher (Ü), dass der Graph $\mathcal{G}(T) = \{(\sqsubseteq, T\sqsubseteq), \sqsubseteq \in \mathcal{V}\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $V \times W$ (in der Produkt-Topologie).

Lemma: Aufgrund der Linearität von T kann die Abgeschlossenheit des Graphen auf einen Spezialfall reduziert werden, d.h. es gilt: eine lineare Abb. T hat abgeschlossenen Graphen genau dann wenn folgende Konklusion (!) möglich ist: Wann immer man eine *gegen Null* konvergente Folge (v_n) in V hat, mit der Eigenschaft dass die Bildfolge $T(v_n)$ in W konvergiert, dann muss auch der Limes $T(v_n) = 0$ sein. Nennen wir die Bedingung (**).

Beweis: Klarerweise ist die Abgeschlossenheit des Graphen (Konvergenz in $V \times W$ ist ja genau die koordinatenweise Konvergenz) äquivalent zu dem statement dass folgende Konklusion möglich ist (wir wollen sie (*) nennen): Wann immer man eine konvergente Folge (v_n) in V hat, deren Limes nun allgemein sein kann, nennen wir ihn $v' \in V$, mit der Eigenschaft dass die Bildfolge $T(v_n)$ in W konvergiert, bezeichnen wir den Grenzwert der Folge der Bilder Tv_n mit $w' \in W$, DANN muß das Paar (v', w') ein Element des Graphen repräsentieren, d.h. es muss gelten $w' = Tv'$.

Es ist logisch klar, dass (*) die Bedingung (**) impliziert, da ja eine Aussage über allgemeine konvergente Folgen den Fall von Nullfolgen als Spezialfall enthält und weiters klar ist, dass $T(0) = 0$ gelten muß aufgrund der Linearität von T .

Umgekehrt ist zu argumentieren, dass die Gültigkeit von (**) ausreicht um den allgemeinen Fall (*) herzuleiten. Die Reduktion von (*) auf den Fall (**) kann naheliegenderweise unter Nutzung der Linearität von T gemacht werden.

NEHMEN wir also an, dass (**) gilt, und betrachten die in (**) gegebene Situation. Klarerweise ist dann eine neu definierte Folge (v''_n) , mit $v''_n = v_n - v'$ eine Nullfolge in V . Die vorausgesetzte Konvergenz der Bildfolge Tv_n impliziert dann die Konvergenz der Folge $T(v''_n) = (\text{Lin.}) = T(v_n) - T(v')$ gegen $w' - T(v')$ (genau die Differenz zwischen dem Limes der Bildfolge und dem Bild des Limes der urspr. ungleichen Folge). Somit sind wir in der Lage die Voraussetzung (**) ins Spiel zu bringen, d.h. den Schluss zu treffen dass $\lim_n T(v''_n) = 0$ sein muss, oder $w' = T(v')$, w.z.z.w..

AUSDRUCK vorläufig bis hierher empfohlen..

Stoff der zweiten Novemberwoche:

SATZ: Eine lineare Abb. T zwischen zwei Banachräumen ist *genau dann stetig* wenn sie einen abgeschlossenen Graphen hat, also genau dann wenn die Bedingung (**) oben erfüllt ist.
und diverse Anwendungen...