

$$\begin{aligned} \exists V \in \mathbb{R}^{n \times n} & \text{ unitär} \\ \exists \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n} & \text{ diagonal} \end{aligned}$$

$$A = U \Sigma V^T$$

Bemerkung: $A = U \Sigma V^T$

$$AA^T = U \Sigma V^T V \Sigma^T U^T$$

$$= U \Sigma^2 U^T \quad \text{Diagonalisierung von } AA^T$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Lemma: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\sigma_{\min} \|x\| \leq \|Ax\| \leq \sigma_{\max} \|x\|$$

Beweis: $A = U \Sigma V^T \Rightarrow \|Ax\| = \|\Sigma V^T x\|$

$$V^T = \begin{pmatrix} -v_1 & \\ & \vdots \\ -v_n & \end{pmatrix}, (v_i)_{i=1:n} \text{ Orthonormalsystem}$$

kommen von $V^T x$ (weil orthogonale Matr.)

$$\Sigma^T V^T x = \begin{pmatrix} \sigma_1 \langle v_1, x \rangle \\ \vdots \\ \sigma_n \langle v_n, x \rangle \end{pmatrix}$$

$$\|Ax\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 \langle v_1, x \rangle \\ \vdots \\ \sigma_n \langle v_n, x \rangle \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum \sigma_i^2 |\langle v_i, x \rangle|^2$$

$$\underbrace{\sigma_{\min}^2 \sum |\langle v_i, x \rangle|^2}_{= \|x\|^2} \leq \sum \sigma_i^2 |\langle v_i, x \rangle|^2 \leq \sigma_{\max}^2 \underbrace{\sum |\langle v_i, x \rangle|^2}_{= \|x\|^2}$$

Pythagoras

$$\sigma_{\min} \|x\| \leq \|Ax\| \leq \sigma_{\max} \|x\|$$

