PS: Funktionalanalysis, WS 2005/06, by HGFei

1. Es sei $(V, \|\cdot\|)$, und U ein (linearer) Teilraum von V. Man zeige, dass der Abschluss von U in V dann ebenfalls ein (nun abgeschlossener) Teilraum von V ist, und (natürlich) gerade der "kleinste abgeschlossene Teilraum von V" der U enthält.

2. Man wiederhole den Riemannschen Umordnungssatz (Aussage über bedingt konvergente Reihen, wie z.B. die alternierende harmonische Reihe). Nachzulesen beispielsweise in `http://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/anvorl1.pdf`, Seite 169 (Satz von Riemann und Lejeune-Dirichlet).

3. Die Norm ist eine stetige Funktion auf einem normierten Raum (welche mit der natürlichen Distanzmetrik $d(x, y) = \|x - y\|$ versehen sei). Insbesondere gilt $\|lim_{n\to\infty} x_n\| = lim_{n\to\infty}\|x_n\|$ für konvergente Folgen in jedem normierten Raum.

4. Jeder abgeschlossene Teilraum eine Banachraumes ist selbst wieder ein Banachraum.

5. Wiederholung des sog. Doppelreihensatz (soll später als Folge der Stetigkeit des linearen Funktionals $S : \mathbf{x} \mapsto \sum_k x_k$ auf ℓ^1 diskutiert werden).

6. Man zeige: konvergiert eine Teilfolge einer Cauchy-Folge, so konvergiert die Cauchyfolge selber.

7. Man zeige, dass der Raum $C([0, 1])$ bzgl. der L^2-Norm ein normierter Raum ist (analog der Raum der stetigen Funktionen mit kompakten Träger auf R bzw. R^d). Sind diese Räume vollständig.

8. Man zeige, dass die "Einheits-Sphäre" in einem normierten Raum, d.h. die Menge $\{v, \|v\| = 1\}$ eine abgeschlossene Teilmenge ist (ebenso die volle Kugel $B_1(0) = \{v, \|v\| \leq 1\}$. Beide Mengen sind - (nur) im Falle eines endlichdim. Vektorraumes auch kompakt. Diese Üeberlegung ist die Basis für den Beweis des "bekannten Faktum" dass auf einem endlichdim. Vektorraum je zwei Normen äquivalent sind.

9. Man zeige, dass aus der Konvergenz im Sinne der L^1 0der L^2-Norm keinesfalls die punktweise Konvergenz folgt.

10. Man führe im Detail aus, dass ... (siehe Vorlesungsmitschrift), zu diversen mit "Ex." oder "Übg." gekennzeichneten Teilen.

11. Man zeige, dass der Raum der beschränkten und stetig differenzierbaren Funktionen $C^{[1]}([0,1])$ mit der Norm $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ein Banachraum ist. **Die Vollständigkeitsdiskussion ist noch offen!**

12. Wenn man den R^d mit der $1-$norm versieht, d.h. $\|\|_1 := \sum_k |x_k|$, wie sieht dann die Operatornorm einer linearen Abbildung (bzw. der zugehörigne Matrix) explizit aus.

13. Es sei T der beschränkte linear Operator, der durch Multiplikation mit einer festen stetigen Funktion g aus $C(I)$ (I kompaktes Intervall) gegeben ist, d.h. $Tf = g \cdot f$. Man bestimme die Operatornorm auf $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$.

14. Man zeige, dass für jedes $x \neq y, x, y \in I$ gilt: Die Norm des Funktionals geht nicht gegen Null für $x \mapsto y$, sogar $\|\delta_x - \delta_y\| = 2$.

15. Man verifiziere im Detail (um einzusehen dass das eine wirklich triviale Tatsache ist), dass die Norm eines zusammengesetzen linearen Operators durch das Produkt der involvierten Operatornormen beschränkt werden kann, formal: $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$ (wobei die Indizierung weggelassen wurde).

    BIS HIERHER gelten die Beispiele in den ersten beiden Woche als gerechnet, ausgenommen das Vollständigkeitsproblem im letzten Beispiel.

MATERIAL f. Anfang November (8. Nov. 2005):

16. Man zeige, dass für jede feste Zerlegung $\mathcal{Z}$ des Intervalls I und jede Wahl von Punkfolgen $(\xi_n)_{n\geq 1}$ in diesen Intervallen (wie üblich), das zugehörige Funktional $T_n : f \mapsto R(\mathcal{Z}, (\xi_n), f)$ (Riemann-Summe) beschänkt und linear auf $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ ist. Hat man weiters eine Folge von solchen Funktionalen, wobei die Maximallänge der , dann konvergieren die Funktionale für alle $f \in C(I)$ genau dann wenn sie für die Monome konvergieren. Was ist das Limes-Funktional?

17. Gegeben zwei normierte Räume $(V^i, \|\cdot\|_i)$. Dann ist der Produktraum mit jeder der (äquivalenten) Normen, wie $\|(v_1, v_2)\| = max(\|v_i\|_i$ oder $\|v_1\|_1 + \|v_2\|_2$ (oder $\dots$) ein normierter Raum ist. Weiters verifiziere man, dass der Produktraum *genau dann vollständig* wenn diese für die beiden Faktoren gilt.

18. Sei $(B, \|\cdot\|)$ ein Banachraum von Folgen, mit der Eigenschaft, dass die Koordinatenabb. stetig ist, also z.B. ℓ^1 oder ℓ^2 oder c_0 = Raum aller komplexen Nullfolgen, mit der jeweils natürlichen Norm. Man zeige dass für jede strikt positive (Gewichts)Folge $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$ die Menge B_w der komplexen Folgen (x_n) mit $(x_n w_n)_{n\geq 1} \in B$ selbst wieder ein Banachraum von Folgen ist (ein sog. gewichteter Folgenraum). Die "natürliche" Norm auf B_w ist dabei durch $\|x\|_{B_w} := \|x \cdot w\|_B$ gegeben. Man zeige, dass die Abb. $x \mapsto x \cdot w$ einen isometrischen Isomorphismus von B_w nach B (nicht umgekehrt!) definiert.

    Man charakterisiere die Äquivalenz von Gewichtsfunktionen derart, dass sie genau der Äquivalenz der zugehörigen Normen entspricht.

19. Man zeige, dass jede stetige lineare Abbildung zwischen zwei normierten Räumen einen Abgeschlossenen Graphen hat. Das sog. "closed graph theorem" (in der Vorlesung zu besprechen) wird zeigen, dass man im Falle von Banachräumen auch die Umkehrung (mit großem Nutzen) behaupten kann.

20. Man zeige, dass ein stetig(!) invertierbarer Operator jedenfalls erfüllt: Es gibt ein $\eta > 0$ sodass $\|Tx\| \geq \eta\|x\|$, für alle x. Insbesondere ist eine Folge (x_k) eine Cauchy-Folge genau dann wenn (Tx_k) eine CF ist.

21. Es sei V_1 ein dichter Teilraum eines normierten Raumes $(V, \|\cdot\|)$ (mit derselben Norm). Dann stimmen die zugehörigen Vervollständigungen überein. Insbesondere ergeben beliebige zwei dichte Teilräume eines normierten Raumes (mit der ererbten Norm) diesebe Vervollständigung.

22. Hat man eine Abildung von einem Banachraum in einen anderen, die auf einem dichten Teilraum definiert ist und isometrisch ist, und dichtes Bild hat. Dann lässt sie sich zu einem isometrischen Isomorphismus fortsetzen.

23. Anwendungen des "closed graph theorems": Man zeige, dass eine lineare Abbildung der Form $(Tx)_n = (x_n z_n)_{n\geq 1}$ von dem Banachraum ℓ^1 in sich automatisch stetig ist. Mit anderen Worten, wenn sie auf einem dichten Teilraum definiert ist, aber dort nicht beschränkt ist, dann muss es auch eine ℓ^1-Folge (x_n) geben, sodass $(x_n z_n)_{n\geq 1} \notin \ell^1$ gilt.

24. Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume von Folgen, die beide stetig in $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ eingebettet sind. Dann gilt: Wenn $X \subseteq Y$ gilt, dann ist auch die entsprechende Inklusion stetig, d.h. Einbettungsabb. sind automatisch stetig (anderes ausgedrückt: bis auf eine Konstante ist die Norm des kleineren Raumes die "empflindlichere"!)

25. Man zeige, dass die Summe zweier Teil Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ wie oben selbst wieder ein Banachraum ist, mit der natürlichen Norm $\|z\| = inf_{z=x+y}\{\|x\|_X + \|y\|_Y.\}$ Dieser Raum ist wieder ein Banachraum und ausserdem isomorph zu einem Quotientenraum von $X \times Y$.

26. Es sei W der Teilraum von $(V, \|\cdot\|) = (C([0,1]), k\|\cdot\|_\infty)$, der aus allen Funktionen besteht, die auf dem Teilinterval $[0, 0.5]$ verschwinden. Man versuche, den Quotientenraum mit einem Teiraum von $(V, \|\cdot\|)$ zu identifizieren.

27. Man benütze die Tatsache, dass die üblichen Treppenfunktionen in $L^1(R)$ mit der 1-Norm dicht liegen, um zu zeigen, dass dieser Banachraum als Vervollständigung interpretiert werden kann.

28. Es sei M eine totale Teilmenge eines normierten Raumes $(V, \|\cdot\|)$. Weiters sei N eine Teilmenge, sodass sich jedes Element von M durch endliche Reihen (es genügt sogar durch absolut konvergente Reihen) mit Elementen aus N beliebig approximieren läßt. Dann ist auch N eine totale Teilmenge von $(V, \|\cdot\|)$.

29. Man zeige, dass die Einbettung zwischen gewichteten ℓ^p Räumen automatisch stetig ist (durch Anwendung des "closed graph theorems").

30. Man verifiziere die Vertauschungsregeln zwischen Verschiebungs (Translation), Modulations bzw. Streckungsoperatoren.

31. Es sei (h_k) ein beliebes Orthonormalsystem in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, und $(c_k) \in \ell^2$ ein Folge über derselben Indexmenge. Man zeige, dass es dann jedenfalls ein Element $f \in \mathcal{H}$ gibt, sodass $\langle f, h_k \rangle = c_k$ für alle k gilt. Unter welchen Bedingungen ist ein solches Element $f \in \mathcal{H}$ eindeutig bestimmt?

32. Man zeige, dass eine gleichmässig stetige Funktion, die integrierbar (oder in einem $L^p, 1 < p < \infty$ liegt, auch im Raum $C^0(R^d)$ liegt.

33. Der Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen auf X (hier der Einfachheit halber eine Teilmenge von R^d) ist eine Banachalgebra bezüglich punktweiser Multiplikation, wobei $f \in Lip(X)$ per definitionem genau dann f eine beschränkte (und automatisch stetige) Funktion ist, und es ein $C > 0$ gibt, sodass für $x, y \in X$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$. Als Norm nimmt man $\|f\|_{Lip} := \|f\|_\infty + \texttt{inf}\{C\}$, wobei das Infimum über alle möglichen Werte der Konstanten C in der Definition genommen wird.

34. Es sei M eine Menge von Operatoren auf einem Banachraum B, d.h. eine Teilmenge von $\mathcal{L}(B, B)$. Man zeige, dass der *Kommutator* von M, d.h. die Menge aller Operatoren aus $\mathcal{L}(B, B)$ die mit den Elementen aus M vertauschen, selbst wieder eine abgeschlossene Teilalgebra von $\mathcal{L}(B, B)$ ist. Beispiel: $M = T_x, x \in R$ ergibt die Menge

aller (beschränkten, linearen) Operatoren die mit Translationen vertauschen. Für den Fall $B = L^2$ sprechen die Ingenieure von den sog. translationsinvarianten "Systemen".

35. Gegeben eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmassen, d.h. von nichtnegativen Funktionen (g_n) mit $\int_R g_n(x)dx = 1$. Es sei G_n die zu g_n gehörige Stammfunktion, als gilt $lim_{x\to-\infty}G_n(x) = 0$ und $lim_{x\to\infty}G_n(x) = 1$. Man zeige, dass die Folge G_n genau dann punktweise gegen eine Stammfunktion G_0R zur Wahrscheinlichkeitsdichte g_0 konvergiert, wenn

$$\int_R h(x)g_n(x)dx \to \int_R h(x)g_0(x)dx$$

für jede Rechtecksfunktion h oder jede stetige Funktion $h \in C_c(R)$ konvergiert.

36. Man zeige, dass die Normalverteilung (mit Dichte g_0) "beliebig teilbar ist", d.h. dass es zu jedem $k \in N$ ein Funktion h gibt (ebenfalls die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmasses), dass das k-fache Faltungsprodukt von h mit sich selber (also $h * h \cdots * h$) gerade g_0 ergibt.

37. Man beweise die Formel $T_x(f * g) = (T_x f) * g$ mit Hilfe der Regeln für die Fourier Transformation. Ebenso beweise man mit Hilfe der Fourier Transformation dass die L^1-normierte Version der Streckung, $St_\rho f(x) := \rho^{-1} f(x/\rho)$ einen Automorphismus für die Banach Algebra $L^1(R)$ darstellt, d. h. dass gilt: $St_\rho(f * g) = St_\rho(f) * St_\rho(g)$

38. Zeige, dass die Abbildung $x \mapsto T_x f$ für jedes $f \in L^1$ eine stetige Funktion von R in den Banachraum $L^1(R)$ ist (sogar gleichmässig stetig).

39. Gegeben eine beschränkte Folge von linearen Operatoren (d. h. $\|T_n\| \leq C$ für alle $n \geq 1$, und $T_n f \mapsto T_0 f$ for alle f. Man zeige, dass dann diese Folge (die also punktweise konvergiert) auch gleichmäßig auf kompakten Mengen konvergiert.

Material ab 6.Dez.2005 bekanntgegeben:

40. Es sei f eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Man zeige, dass dann die Differenzen-Quotienten gleichmäßig gegen die Ableitung f' konvergiert, daher natürlich auch im Sinne der L^1-Norm. Man kann daraus ableiten, wie die Fourier Transformierte von f' mit der Fourier-Transformierten $\hat{f}$ zusammenhängt (durch eine einfache Multiplikation !), und dass $|\hat{f'}|(\omega) = |2\pi\omega||\hat{f}|$.

41. Man zeige, dass sich das Differenzieren mit der Faltung "gut verträgt", d.h. dass gilt:
$$(f * g)' = f' * g = f * g' \,,$$
jedenfalls wenn einer der beiden Faltungsfaktoren stetig differenzierbar ist mit kompaktem Träger, und der andere lediglich integrierbar.

42. Man zeige, dass die Faltung mit einer Box-Funktion den Glattheitsgrad einer Funktion um 1 erhöht, d.h. eine dreimal stetig differenzierbare Funktion wird durch diese Faltung viermal stetig differenzierbar. Man beachte: Das Bilden der Stammfunktion kann als Faltung mit der sog. Heavyside Funktion interpretiert werden: $F(x) = f * \mathbf{1}_{(-\infty,0]}$. Andererseits ist jede Box-Funktion (Indikatorfunktion eines Intervalls) die Differenz von zwei verschobenen H-Funktionen.

43. (neu: 12.12.): Man zeige, dass eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen genau dann *offen* ist, wenn Kugeln um Null auf Umgebungen von Null abgebildet werden.

44. Es sei A eine Menge in einem Hilberraum $\mathcal{H}$. Man zeige, dass die zu A orthogonale Teilmenge von $\mathcal{H}$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ ist. Weiters gilt, $A^\perp$ stimmt mit $V^\perp$ überein, wo V die abgeschlossene lineare Hülle von A in $\mathcal{H}$ ist. Insbesondere stimmen $A^\perp$ und $(A^-)^\perp$ überein, und Mengen die denselben abgeschlossenen linearen Teilraum erzeugen, haben denselben Orthogonalraum.

45. Eine Folgerung aus dem Satz von der offenen Abbildung: Es sei T eine beschränkte, lineare Abbildung von einem Banachraum V *auf* einen Banachraum W. Man zeige, dass dann eine natürliche Abbildung (vgl. lineare Algebra) vom Quotientenraum V/N, wobei N der Nullraum von T ist, nach W existiert, der einen *Isomorphismus* des Quotientenraumes V/N mit dem Bildraum W induziert.

46. Eine Teilmenge in $\mathcal{H}$ ist genau dann total, wenn $A^\perp$ nichttrivial ist. Weiters gilt: $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

. . . . . .

NEUES MATERIAL im JANUAR 2006, MEHR in KÜRZE!

47. Man zeige, dass ein linearer Operator von einem Banachraum in einen anderen, welcher endlichen Rang hat, automatisch kompakt ist, d.h. dass das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel relativ kompakt im Bildraum ist.

48. Ein linearer Operator von einem Banachraum in einen anderen heißt kompakt, wenn er sich in der Normtopologie (der Operatoren) durch endlichdimensionale Operatoren (das ist nur ein anderen Wort für Operatoren von endlichem Rang) approximieren lassen.

49. Wiederholung des Begriffes von Netzen: Ein Netz in (z.B.) einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist eine Abbildung von einer gerichteten Menge I in diesen normierten Raum. Die Begriffe wie "Konvergenz eines Netzes" bzw. die Charakterisierung von Punkten im Abschluss einer Menge durch konvergente Netze aus der Menge sollen kurz wiederholt werden. Weitere (im Vergleich zur Vorlesung) Beispiele? (vgl. Werner: p.502: NETZE)

50. Man zeige, dass die Einheitskugel im Lipschitzraum gleichgradig gleichmäßig stetig ist, d.h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ sodass für jede Funktion aus dieser Menge und jedes Paar x, y mit$|x - y| < \delta$ schon garantiert werden kann, dass $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ gilt.

51. Es sei M eine gleichgradig stetige, beschänkte Menge von Funktionen in $C^b(R)$ (natürlich versehen mit der sup-Norm). Man zeige, dass ein punktweise konvergente Folge aus dieser Menge auch *gleichmäßig auf kompakten Mengen* konvergiert.

52. Wer Interesse hat, möge sich den Zusammenhang zwischen Filtern und Netzen überlegen. Man kommt von einem Filter (ist ja so eine gerichtete Menge) zu einem Netz, indem man den Filter als Indexmenge nimmt, und ein Element daraus wählt. Umgekehrt kann man aus einem Netz einen Filter konstruieren, indem man die Obermengen der "Endabschnitte" nimmt.

53. (leicht) Es sei eine Abbildung H zwischen normierten Räumen der punktweise Limes von linearen Abbildungen T_n. Man zeige, dass dann auch die Grenzfunktione eine lineare Abbildung ist.

    Bemerkung: dasselbe gilt auch, wenn die Abbildungen nur affine Abbildunge A_n sind, also $A_n(x) = T_n(x) + w_n$, wobei T_n wie vorher lineare Abbildungen sind. Man zeige dass der punktweise Limes selbst wieder eine affine Abbildung ist.

54. Es sei T_n eine Folge von Operatoren von einem normierten Raum in einen endlichdimensionalen Banachraum, welche in der starken Operatortopologie T_0 konvergiert, d.h. es gelte $T_n x \to T_o x$ für $n \to \infty$, für alle x. Man zeige, dass daraus schon die Konvergenz in der Operatornorm folgt (wenn der Bildraum *nicht* endlichdimensional ist, gilt dieser Schluss natürlich nicht, Beispiele?).

55. Die Folge von gewichteten Dirac-Maßen $c_n \delta_n$ (oder $c_n \delta_{x_n}$ für eine beliebige Folge x_n die gegen ∞ konvergiert) ist w^*-konvergent auf dem Banachraum $(C_0(R), \| \cdot \|_\infty)$ (mit Limes Null) genau dann wenn die Folge $(c_n)_{n \geq 1}$ eine *beschränkte* Folge von komplexen Zahlen ist.

56. (Einzeiler) Man zeige, dass ein Operator T auf einem Hilbertraum normal ist, d.h. die Bedingung $T' \circ T = T \circ T'$ erfüllt, wenn für jedes x gilt: $\|Tx\| = \|T'x\|$.

57. (*) Man zeige, dass ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt (also ein sog. Praehilbertraum) genau dann ein Hilbertraum ist, wenn für jedes Orthonormalsystem h_n und jede Folge (c_n) in ℓ^2, die Reihe $\sum_n c_n h_n$ konvergiert in der zugehörigen Norm.

58. Man zeige, dass die Fourier Transformation (welche ja unitär auf dem Hilbertraum $L^2(R)$ agiert, nur die Eigenwerte $\{1, -1, i, -i\}$ hat (es wird vermutlich keine Zeit sein vorzuführen, dass die sog. *Hermite-Funktionen* $H_n(x)$, welche man durch die Anwendunge des Gram-Schmidt Prozesses auf die Folge $x^n g_0(x), n \geq 0$ erhalten kann, eine vollständige Orthonormalbasis für $L^2(R)$ bilden, und dass sie Eigenvektoren zu i^n sind. Daraus folgt, dass der Teilraum der Fourier invarianten Funktionen genau das abgeschlossene lineare Erzeugnis der Hermite-Funktionen $(H_{4n})_{n \geq 0}$ ist. Es gilt natürlich $H_0(x) = g_0(x)$, die Gauss-Funktion.

59. Man zeige, dass die Aufspaltung eines beliebigen Hilbertraumes immer durch eine Partition einer vollständigen Orthonormalbasis in zwei Mengen realisierbar ist, m.a.W.: Zu jedem Teilraum W eines Hilberraumes H gibt es eine (meist sehr viele) vollst. ONB, sodass W von einem Teilsystem aufgespannt wird, während die übrigen Vektoren des Systems genau das orthog. Komplement $W^{\perp}$ aufspannen.

60. Es sei (x_α) ein Cauchynetz in einem normierten Raum (oder gleich nur in einem metrischen Raum), und (x_β) sei eine Verfeinerung. Man zeige, dass dann auch die Verfeinerung eine Cauchynetz ist. Die Folge selbst konvergiert genau dann, wenn die Verfeinerung konvergiert!

61.